11 空間向量

高三彈性數學

班級: 座號: 姓名:

第 1 至 3 題為題組

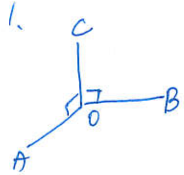
在四面體 $OABC$ 中，$\overline{OC}\perp\overline{OA}$，$\overline{OC}\perp\overline{OB}$，$\angle AOB=120^\circ$，且 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=1$，試回答下列問題：

1. ΔABC 的面積為何？

   (1)$\dfrac{\sqrt{13}}{4}$ (2)$\dfrac{\sqrt{14}}{4}$ (3)$\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ (4)1 (5)$\dfrac{\sqrt{17}}{4}$

2. 若平面 ABC 與平面 OAC 的銳夾角為 θ，試求 $\cos\theta$ 之值。

3. 若 P 為 $\overline{AC}$ 中點，且 $\overline{AB}$ 上存在一點 Q，使得 $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{OA}$，則 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AQ}}$ 之值為何？

題號	作答區
1	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 − ±
2	1.  設 $A(1,0,0)$, $B(\cos 120^\circ, \sin 120^\circ, 0)$, $C(0,0,1)$ $=(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$ $\overrightarrow{AB}=(\frac{-3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,0,1)$ $\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}\ \frac{\sqrt{3}}{2}\ 0\ \frac{-3}{2}\ \frac{\sqrt{3}}{2}\ \cancel{0}$; $\cancel{1}\ 0\ 1\ -1\ 0\ \cancel{1}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{\sqrt{3}}{2}$ ΔABC 面積 $=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}$ $=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{15}{4}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，選 (3) 2. 平面 ABC 之法向量 $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})\parallel(1,\sqrt{3},1)$
3	平面 OAC 之法向量為 $(0,1,0)$ $\cos\theta=\dfrac{(1,\sqrt{3},1)\cdot(0,1,0)}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ 3. $P(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$ $\overrightarrow{AB}=(\frac{-3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)\parallel(-\sqrt{3},1,0)$, 設 $Q(1-\sqrt{3}t,t,0)$ $\overrightarrow{PQ}=(\frac{1}{2}-\sqrt{3}t,t,\frac{-1}{2})$, $\overrightarrow{OA}=(1,0,0)$ $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OA}=0\Rightarrow\frac{1}{2}-\sqrt{3}t=0$, $t=\frac{1}{2\sqrt{3}}$, $Q(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}},0)$ $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AQ}}=\dfrac{\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}+0}}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+0}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}}}=3$ 答案: 3 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ 3

第 4 至 6 題為題組

空間坐標中，設 $A(3,4,2)$、$B(2,7,4)$，P 是 xy 平面上的一點，試求：

4. A 點在 xy 平面的投影點坐標為何？

   (1) $(3,0,0)$　(2) $(3,4,0)$　(3) $(3,4,-2)$　(4) $(0,4,2)$

5. $\overline{AP}+\overline{PB}$ 的最小值為何？

6. 當 $\overline{AP}+\overline{PB}$ 有最小值時，此時 P 點坐標為何？

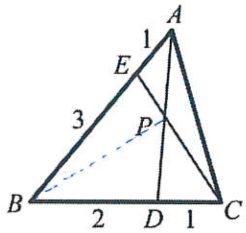
題號	作答區
4	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 − ±
5	4. A在 xy之投影点 $(3,4,0)$ 5. 作 A 對 xy 平面之對稱点 $A'(3,4,-2)$ $\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}$ 之 min $=\overline{A'B}=\sqrt{1^2+3^2+6^2}=\sqrt{46}$ 6. P 為 $\overline{A'B}$ 與 xy平面之交点 $(z=0)$ $\overrightarrow{A'B}=(-1,3,6)$ 設 $P(3-t,4+3t,-2+6t)$ $\because -2+6t=0$，$t=\frac{1}{3}$ $\therefore P(\frac{8}{3},5,0)$
6	答案: 2　$\sqrt{46}$　$\left(\frac{8}{3},5,0\right)$

11 空間向量

補充試題

第 7 至 9 題為題組

如圖，△ABC 的 $\overline{AB}$ 邊上取一點 E，使得 $\overline{AE}:\overline{EB}=1:3$，又在 $\overline{BC}$ 邊上取一點 D，使得 $\overline{CD}:\overline{DB}=1:2$，設 $\overline{AD}$ 與 $\overline{CE}$ 的交點 P，試求下列問題：



7. 下列何選項為△BPC：△CPA：△APB 的面積比？
(1)1：2：3　(2)1：3：2　(3)2：1：3　(4)2：3：1　(5)3：1：2

8. 設 P 為平面 E 上△ABC 內部一點，且 O 為平面 E 外一點，已知面積比△BPC：△CPA：△APB $=k:m:n$，試證：$\overrightarrow{OP}=\dfrac{k}{m+n+k}\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n+k}\overrightarrow{OB}+\dfrac{n}{m+n+k}\overrightarrow{OC}$。

9. 承(7)，已知△ABC 在平面 E 上，且 O 為平面 E 外一點，若 $\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}$，則數對 $(a,b,c)=$______。

7. ∵ $\overline{BD}:\overline{CD}=2:1$　　∵ $\overline{BE}:\overline{AE}=3:1$

∴ △ABP : △ACP = 2 : 1　　△CPB : △CPA = 3 : 1

答案: 5　$(\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{3})$

⇒ △ABP : △ACP : △CPB = 2 : 1 : 3 ，選 (5)

8. △BPC : △CPA = $\overline{BE}:\overline{AE}$ = k : m

$\overrightarrow{OE}=\frac{k}{k+m}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{k+m}\overrightarrow{OB}$ ... ①

△BPC : △ABP = k : n　又 △BPE = $\frac{k}{k+m}$ △ABP

△BPC : △BPE = k : n $\cdot\frac{k}{k+m}$ = (k+m) : n = $\overline{PC}:\overline{PE}$

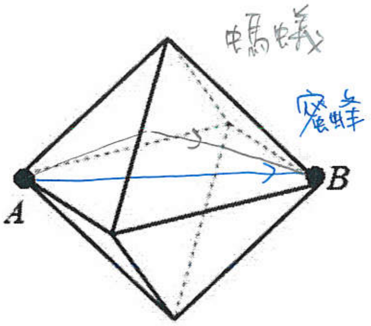
$\overrightarrow{OP}=\frac{k+m}{(k+m)+n}\overrightarrow{OE}+\frac{n}{(k+m)+n}\overrightarrow{OC}$ ... ②

①代入③ 得證：$\overrightarrow{OP}=\frac{k}{k+m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{k+m+n}\overrightarrow{OB}+\frac{n}{k+m+n}\overrightarrow{OC}$

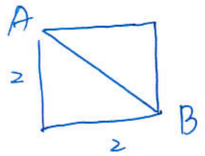
9. k=3, m=1, n=2,　故 $a=\frac{3}{6}$, $b=\frac{1}{6}$, $c=\frac{2}{6}$

第 10 至 11 題為題組

如圖，有一個邊長為 2 正八面體，外部有一隻螞蟻，內部有一隻蜜蜂，同時從 A 點出發，想要走最短路徑到達 B 點，試問

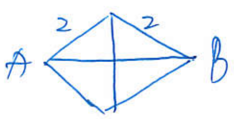


10. 蜜蜂移動的距離為何？



$\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

11. 螞蟻移動的距離為何？



高 $=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$

$\sqrt{3}\times 2=2\sqrt{3}$

答案: $2\sqrt{2}$ $2\sqrt{3}$