高三彈性數學

班級:　　　　　　座號:　　　　　　姓名:

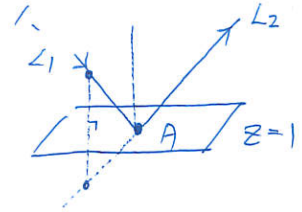
第 1 至 3 題為題組

空間中，設平面 $E: z=1$ 為一鏡面，一光線沿著直線 $L_1: \frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{5}$ 前進，碰到鏡面上的 A 點，反射之後沿著直線 L_2 前進，試回答下列問題：

1. A 點坐標為何？
   (1) $(1,0,1)$　(2) $(1,0,-1)$　(3) $(-1,0,1)$　(4) $(-1,0,-1)$

2. 若 L_2 的比例式為 $\frac{x-2}{a}=\frac{y-1}{b}=\frac{z+4}{-5}$，則數對 $(a,b)=$__________。

3. 若點 $(-4,m,n)$ 在 L_2 上，則 $m+n=$__________。

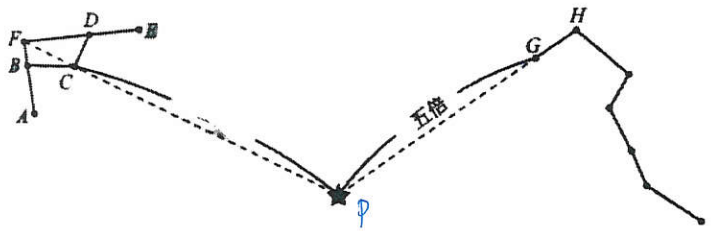
題號	作答區
1	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 − ±
2	1、 $\because$ A 在 L_1 上 設 $A(2+3t, 1+t, 6+5t)$ $\because$ A 在 E 上 $\therefore$ $6+5t=1$, $t=-1$ 故 $A(-1,0,1)$ 2、$B(2,1,6)$ 對 E 作對稱點 $B'(2,1,-4)$ $(2,1,-4)$ 必落在 L_2 上 $\overrightarrow{L_2} \parallel \overrightarrow{AB'}=(3,1,-5)$　$\therefore (a,b)=(3,1)$
3	3、 $(-4,m,n)$ 代入 L_2 $\Rightarrow \frac{-6}{3}=\frac{m-1}{1}=\frac{n+4}{-5}$ $\therefore m-1=-2$, $m=-1$ $n+4=10$, $n=6$　$\Rightarrow m+n=5$ 答案: (3)　(3,1)　5

第 4 至 6 題為題組

教師教同學如何在春、秋兩季尋找北極星，做了以下的介紹：

一、春季的星空中，最明顯的星座就屬大熊星座的「北斗七星」，是由七顆行星組成的勺子形狀，其中前四顆星為勺口，後三顆星為勺柄。以北斗七星勺口的前緣兩顆星，往前延伸五倍的距離，就可以找到北極星，這是最容易判斷的方法。

二、秋季的星空雖然較為稀疏黯淡，仍然有一個容易辨識的星座，也就是看起來像英文字母「M」或「W」的仙后座。以仙后座 M 字形兩個側邊(AB 邊和 DE 邊)往上延伸的交會點(F 點)，以及此點與 M 字形中間那點(C 點)相連接，往下延伸五倍的距離，即可找到北極星。接著他在黑板上畫了這個圖，令北極星點為 P，



4. 若圖中 $G(2,-5,0)$、$H(1,-4,-3)$，且北極星 P 點的坐標為 (x,y,z)，則 $x+y+z$ 的值為何？
(1)10　(2)11　(3)12　(4)13　(5)14

5. 承上，下列哪些點會在直線 GH 上？
(1) $(3,-6,3)$　(2) $(4,7,-6)$　(3) $(5,-7,9)$
(4) $(\frac{5}{2},-\frac{11}{2},\frac{3}{2})$　(5) $(-1,-2,-9)$

6. 承上，若圖中 $A(5,6,11)$、$B(2,3,5)$、$D(7,11,9)$、$E(11,17,13)$，則點 C 坐標為何？

題號	作答區
4	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 − ±
5	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 − ±
6	4. $P=G+5\overrightarrow{HG}=(2,-5,0)+5(1,-1,3)$ $=(7,-10,15)$ $x+y+z=12$，選 (3)# 5. $G(2,-5,0)$，$\overrightarrow{HG}=(1,-1,3)$ $x=3\Rightarrow(3,-6,3)$ $x=4\Rightarrow(4,-7,6)$ $x=5\Rightarrow(5,-8,9)$ $x=\frac{5}{2}\Rightarrow(\frac{5}{2},-\frac{11}{2},\frac{3}{2})$　選 (1)(4)(5) $x=-1\Rightarrow(-1,-2,-9)$ 6. ∵ F 在直線 AB 上 ⇒ 設 $F(2+t,3+t,5+2t)$ $(\overrightarrow{AB}=(-3,-3,-6)\parallel(1,1,2))$ F 在直線 DE 上 ⇒ 設 $F(7+2s,11+3s,9+2s)$ $(\overrightarrow{DE}=(4,6,4)\parallel(2,3,2))$ $2+t=7+2s$，$3+t=11+3s$ $\Rightarrow s=-3,\ t=-1$　∴ $F(1,2,3)$ $C=\frac{1\cdot P+5\cdot F}{1+5}=\frac{(12,0,30)}{6}=(2,0,5)$ 答案: (3)　(1)(4)(5)　C(2,0,5)

補充試題

第 7 至 9 題為題組

某縣市舉辦跨年晚會，為了製造聲光效果，在晚會進行當中，工作人員投射兩道雷射光在舞台上方交會。設想舞台是 xy 平面，後面的布幕是 yz 平面，其中一道雷射光由點（0 , 1 , 2）朝點（1 , 3 , 5）發射；另一道雷射光由點（2 , b , 4）沿著平行直線 $\begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases}$ 的方向發射。試問

7. 當 b 為下列哪一選項時，兩道雷射光會相交？
 (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3 (5) 4

8. 承 7，求兩道雷射光相會點的坐標。

9. 承 8，求兩道雷射光所決定的平面與布幕所成的銳角的餘弦值。

答案: (2) (2,5,8) 1/(3^.5)

直線 $\begin{cases} x=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ 的方向為 $\begin{array}{cccccc} \cancel{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 1 & -1 & 0 & 1 & \cancel{-1} \end{array}$ $(0,1,1)$

7. 設交點 P，第一道雷射光方向：$(1,2,3)$

設 $P(t, 1+2t, 2+3t) = (2, b+s, 4+s)$

$\begin{cases} t=2 \\ 1+2t=b+s \\ 2+3t=4+s \end{cases} \rightarrow s=4$ $\therefore 5=b+4$, $\underline{b=1}$ #

8. 交點 $(2,5,8)$

9. 兩道雷射光所決定平面之法向量

$\begin{array}{cccccc} \cancel{1} & 2 & 3 & 1 & 2 & \cancel{3} \\ \cancel{0} & 1 & 1 & 0 & 1 & \cancel{1} \end{array}$

$(-1,-1,1)$

$\cos\theta = \dfrac{(-1,-1,1)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{3}\ \sqrt{1}} = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$, 銳夾角 $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

第 10 至 12 題為題組

設 L_1 過點 $A(3,0,1)$ 且與直線 $L_2:\begin{cases}x-y-1=0\\x-2z-3=0\end{cases}$ 平行，試回答下列問題：

10. 將 L_2 化成比例式為 $\dfrac{x-3}{a}=\dfrac{y-2}{b}=\dfrac{z}{1}$，則數對 (a,b) 為何？
(1) $(1,1)$　(2) $(2,-2)$　(3) $(2,2)$　(4) $(-2,-2)$

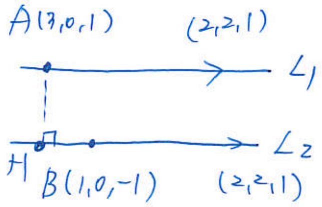
11. 若 L_1 的比例式為 $\dfrac{x-3}{m}=\dfrac{y}{n}=\dfrac{z-1}{-2}$，則 $m+n$ 的值為何？
(1) 0　(2) 2　(3) 8　(4) −8

12. L_1 與 L_2 之間的距離為____________。

答案: 3　4　2

10、L_2 之方向向量為 $\begin{array}{ccccc} \cancel{1} & -1 & 0 & 1 & -1 \; \cancel{0} \\ \cancel{1} & 0 & -2 & 1 & 0 \; \cancel{-2} \end{array}$ → $(2,2,1)$，選(3)#

11、$(m,n,-2)\parallel(2,2,1)$，　∴ $m=n=-4$，$m+n=-8$，選(4)#

12、


L_2 上取 $x=1 \Rightarrow \begin{cases}1-y-1=0, & y=0\\ 1-2z-3=0, & z=-1\end{cases}$

∴ $(1,0,-1)$ 為 L_2 上一點.

設 A 在 L_2 上之投影點 H，設 $H(1+2t,2t,-1+t)$

$\overline{AH}=\sqrt{(2t-2)^2+(2t)^2+(t-2)^2}=\sqrt{9t^2-12t+8}$

$=\sqrt{9(t^2-\frac{4}{3}t)+8}=\sqrt{9(t-\frac{2}{3})^2+4}$

∴ $\overline{AH}$ 之 min $=d(L_1,L_2)=\sqrt{4}=2$