

## 14 矩陣

# 高三彈性數學

班級:

座號:

姓名:

### 第 1 至 3 題為題組

某病毒的突變是由  $a, b, c$  三類訊息決定，當前一代的訊息碼為  $a, b, c$  時，下一代訊息碼會變成  $2a - b, 3a - 2b, c + 2$ 。該病毒第  $n$  代的訊息碼為  $a_n, b_n, c_n$ ，且知道第 1 代訊息碼為  $a_1 = 3, b_1 = 2, c_1 = 1$ 。試回答下列問題。

1. 若二階矩陣  $A$  滿足  $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ ，求  $A$ 。

2. 下列哪些選項的數字不可能是  $a$  類或  $b$  類的訊息碼。

- (1)0 (2)4 (3)6 (4)8 (5)9

3. 試求第 18 代病毒訊息碼為  $a_{18}, b_{18}, c_{18}$  的值。

題號	作 答 區
1	<p>1. <math>\begin{bmatrix} 2a-b \\ 3a-2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 &amp; -1 \\ 3 &amp; -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}</math></p> <p>2. <math>a_1=3 \quad a_2=4 \quad a_3=3 \Rightarrow</math> 循環。  <math>b_1=2 \quad b_2=5 \quad b_3=2</math> 可能訊息碼為 2, 3, 4, 5</p> <p><math>\therefore A = \begin{bmatrix} 2 &amp; -1 \\ 3 &amp; -2 \end{bmatrix}</math></p>
2	<p>3. <math>a_{18} = a_2 = 4</math>  <math>b_{18} = b_2 = 5</math>  <math>c_{18} = 1 + 2 \times 17 = 35</math></p>
3	<p>答案: <math>\begin{bmatrix} 2 &amp; -1 \\ 3 &amp; -2 \end{bmatrix}</math> (1)(3)(4)(5) (4,5,35)</p>

### 第 4 至 6 題為題組

二十世紀畫壇上，艾雪的作品在科學與藝術的結合下，帶給人們許多驚訝與讚嘆！「騎士」是一幅藏著數學原理的美麗圖案，其中鏡射、平移是主要的設計概念，參考如右圖，請回答下列問題。

4. 已知  $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $N = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，右圖中，原

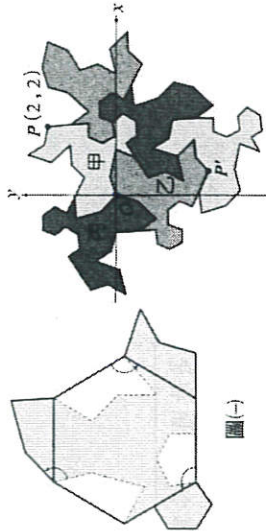
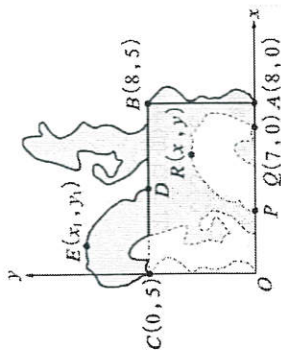
來馬頭上的  $P$ 、 $Q$ 、 $R$ 、 $D$  分別對應到  $D'$ 、 $C$ 、 $E$ 、 $A$ ，則下列選項中，

哪些用矩陣表示  $R = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ 、 $E = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$  兩點之間的變換是正確的？

(1)  $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$  (2)  $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \end{bmatrix}$  (3)  $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$

(4)  $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \end{bmatrix}$  (5)  $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \end{bmatrix}$

5. 將圖(一)的正六邊形，內部分割成幾個區域，再分別以各頂點為旋轉中心，從不同方向旋轉，稱為「小磁磚」，這些小磁磚可以拼成一個美麗平面。若甲、乙、丙三個全等的「小磁磚」的相對應的頂點在原點  $O$  重合，且甲、乙兩個小磁磚上，頂點  $P(2,2)$  與  $P'$  為對應頂點，如圖(二)，試求  $P'$  點坐標。



6. 在坐標平面上，定義一個坐標變換  $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ ，其中

$(x, y)$  代表舊坐標， $(u, v)$  代表新坐標。若舊坐標  $(x, y)$  的點，經此坐標變換得到的新坐標為  $(-1, 7)$ ，則  $(x, y) = ?$

題號	作	答	區
4	1 <input type="checkbox"/> 2 <input type="checkbox"/> 3 <input type="checkbox"/> 4 <input type="checkbox"/> 5 <input type="checkbox"/> 6 <input type="checkbox"/> 7 <input type="checkbox"/> 8 <input type="checkbox"/> 9 <input type="checkbox"/> 0 <input type="checkbox"/>		
4	① 先將 PQR 點稱 y 軸後 Q'(-7,0) ② 將 Q'(-7,0) 平移 (7,5) 至 C(0,5) STEP 1: $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ∴ $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$ STEP 2: $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$ P' 旋轉 120° 為 P		
5			
6			

答案: (3)(4) 旋轉(-120度)  $(-1 + \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$  (5, -10)

## 14 矩陣

### 補充試題

#### 第 7 至 8 題為題組

電腦工程師設計一款只有  $A, B$  兩個地鼠洞的打地鼠遊戲，地鼠每次只從一個地鼠洞冒出，而且下次再從此洞冒出的機率是  $\frac{1}{3}$ ，也就是說，從另一個洞冒出的機率為  $\frac{2}{3}$ 。

已知第一次地鼠從  $A$  洞冒出，且令  $a_n, b_n$  分別代表第  $n$  次地鼠從  $A, B$  洞冒出的機率。試回答下列問題。

7. 選出正確的選項。

(1)  $a_1 = 0$     (2)  $a_2 = \frac{1}{3}$     (3)  $a_3 = \frac{5}{9}$     (4)  $a_4 = \frac{13}{27}$     (5)  $a_n + b_n = 1$

8. 已知  $\langle a_n \rangle$  滿足  $a_{n+1} = a + b \cdot a_n$ ，試求實數  $a, b$  的值。

$$\begin{matrix} & A & B \\ \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(1)

$$a_1 = 1, b_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_4 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{27} \\ \frac{14}{27} \end{bmatrix}$$

答案：(2)(3)(4)(5)     $a = \frac{2}{3}$      $b = -\frac{1}{3}$

∴ 選 (2)(3)(4)(5)

8.

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n$$

$$= \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}(1 - a_n)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}a_n$$

$$\therefore (a, b) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

## 第 9 至 10 題為題組

在密碼學中，密文是由明文經加密法所產生的，而每種加密法都有其特性，其中由美國數學家希爾於 1929 年發明的希爾密碼是線性代數在密碼學中的一個經典應用，希爾密碼利用矩陣的運算來替換密碼，將每個英文字母對應到 26 進位制的數字，其對應的方式如下表：

英文字母	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
26 進位制	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
英文字母	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
26 進位制	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

找出各字母對應的數字，再利用密鑰矩陣  $M$  來進行加密。

例如：密鑰矩陣  $M = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ，將明文 **math** 經密鑰矩陣  $M$  進行加密，可知每個字母對應的數字依

序為 12, 0, 19, 7，由希爾加密公式可得  $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 19 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & 55 \\ -12 & -12 \end{bmatrix}$ 。

當加密後所得的數字大於 25 時，則以該數除以 26 所得餘數取代；當加密後所得的數字小於 0 時，則將該數加上 26 的整數倍，使其介於 0 與 25 之間。因比加密後所得的數字 48, -12, 55, -12，則依序被取代為 22, 14, 3, 14，再由字母對應表得密文為 **wodo**。試依此加密法且明文矩陣中的擺放位置仿照上文所示，試回答下列問題：

9. 若密鑰矩陣  $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ，則明文 **shop** 經密鑰矩陣  $M$  進行加密所得的密文為下列何者？

(1) eops

(2) gtsz

(3) huta

(4) ulcl

(5) zplb

10. 已知蘿拉以帳號 **abba** 和 **beer** 來登入兩個不同的社群媒體，若將帳號 **abba** 經密鑰矩陣

$M = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix}$  進行加密所得的帳號為 **dccb**，則另一組帳號 **beer** 經密鑰矩陣  $M$  進行加密所得的帳號為何？

答案: (2) ojhm