# 高三彈性數學

班級:　　　　　　　　座號:　　　　　　　　姓名:

## 第 1 至 3 題為題組

$\triangle ABC$ 為一白色正三角形(圖 0)，將 $\triangle ABC$ 每一邊分別三等分可得 6 個等分點，依序連接這 6 個等分點可形成一個正六邊形，並將正六邊形區域黑色填滿，如圖 1 所示。接下來在剩下的三個正三角形中依同樣方式各做一個黑色正六邊形，如圖 2 所示。依此方式繼續進行得圖 3、圖 4、……。若將圖 $n$ 中的黑色正六邊形個數記為 $a_n$，白色正三角形個數記為 $b_n$，則 $a_1=1$，$a_2=4$，……；$b_1=3$，$b_2=9$，……以此類推。

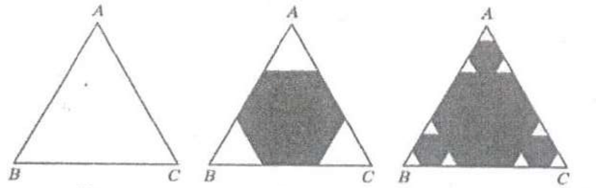


圖 0　　圖 1　　圖 2

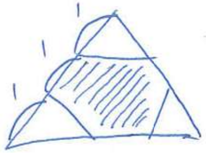
1　3　9

1. 請問圖 5 有幾個白色三角形？
   (1) 27 個 (2) 81 個 (3) 243 個 (4) 729 個 (5) 2187 個

$3^5$

2. 寫出 $a_n$ 的遞迴關係式。

3. 欲使圖 $n$ 中黑色正六邊形的面積總和大於 $\triangle ABC$ 面積的 $\dfrac{49999}{50000}$ 倍，則整數 $n$ 至少為何？(已知 $\log 3 \approx 0.4771$、$\log 5 \approx 0.6990$)

<table>
<tr><th>題號</th><th>作答區</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 − ±</td></tr>
<tr><td>2</td><td>圖1, $a_1 = a_0 + 1$<br>2, $a_2 = a_1 + 3$<br>3, $a_3 = a_2 + 9$.<br>$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 3^{n-1} \quad (n \geq 2) \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td><br>設大白色正三角形邊長為 3<br>小白色三角形邊長為 1<br>大白色三角形面積：小白色三角形面積<br>$= 3^2 : 1^2 = 9:1$<br>每次剩下白色三角形為原來的 $3 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$<br>亦即(圖 $n$)的白色三角形面積是(圖 $n-1$)的白色三角形面積的 $\frac{1}{3}$ 倍，是(圖 0)的白色三角形面積的 $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ 倍。<br>黑色面積 = 大三角形面積 − 剩下白色三角形面積<br>故為 $\triangle ABC$ 的 $1-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ 倍.<br>$1-\left(\frac{1}{3}\right)^n > \frac{49999}{50000}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{1}{50000}$, $3^n > 50000$, $n \geq 10$.<br>$(3^9 = 19683 \quad 3^{10} = 59049)$</td></tr>
</table>

## 第 4 至 6 題為題組

小明為了參加台北 101 國際登高賽。在家裡附近的一個階梯跑上跑下訓練，久了他覺得有點無趣，他為了讓訓練更有趣一點，他用新的規則跑階梯。規則如下：

(1)第一次從地面往上跑 $2^2$ 階，往下跑 $1^2$ 階，停在第 3 階；

(2)第二次從第一次停留地往上跑 $3^2$ 階，往下跑 $2^2$ 階，停在第 8 階；

(3)第 $k$ 次從第 $k-1$ 次停留地往上跑 $(k+1)^2$ 階，往下跑 $k^2$ 階，停在第 $a_k$ 階；

(4)這個階梯共有 1137 階，跑到最上面，訓練就停止。

$a_{10}=(2^2-1^2)+(3^2-2^2)+\cdots+(11^2-10^2)=11^2-1^2=120$

4. $a_{10}$ 的值為何？
   (1)90 (2)100 (3)110 (4)120 (5)130

5. 當小明跑完第 10 次，停在 $a_{10}$ 階，他總共跑了幾個樓梯。(跑上及跑下的皆算)

6. 小明跑第 $n$ 次中途時，會登上第 1137 階，求 $n$ 值。

<table>
<tr><th>題號</th><th>作 答 區</th></tr>
<tr><td>4</td><td>1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 − ±（劃記：4）</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$(2^2+1^2)+(3^2+2^2)+\cdots+(11^2+10^2)$<br>$=(1^2+2^2+\cdots+11^2-1^2)+(1^2+2^2+\cdots+10^2)$<br>上 下<br>$=\frac{11\times12\times23}{6}-1+\frac{10\times11\times21}{6}$<br>$=890$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>第 n 次往上跑最後一階停留在<br>$(2^2-1^2)+(3^2-2^2)+\cdots+(n^2-(n-1)^2)+(n+1)^2\geq1137$<br>$n^2-1+(n+1)^2\geq1137 \Rightarrow 2n^2\approx1137, n\approx24$<br>取 $n=24$, $24^2-1+25^2=1200$<br>$n=23$, $23^2-1+24^2=1104$,<br>故第24階中途會登上1137階.</td></tr>
</table>

# 補充試題

## 第 7 至 9 題為題組

某個挑戰遊戲，其規則設計如下：

關卡 1：挑戰關卡需花費 1000 元，成功過關則可獲得 2000 元。

關卡 2：挑戰關卡需花費 2000 元，成功過關則可獲得 4000 元。

關卡 3：挑戰關卡需花費 4000 元，成功過關則可獲得 8000 元。

關卡 4：挑戰關卡需花費 8000 元，成功過關則可獲得 16000 元。

關卡 $n$：挑戰關卡需花費 $2^{n-1}\times1000$ 元，成功通關則可獲得 $2^{n}\times1000$ 元。

玩家小明想要賺取更多獎金，但無法保證每一個關卡都能順利過關，所以他想到一個可以他認為穩定賺取金錢的策略，如下：

從關卡 1 開始，依關卡順序挑戰，挑戰失敗則挑戰下一個關卡，挑戰成功則重回第一個關卡開始新一輪的挑戰。

例如：

一、挑戰關卡 1 成功，獲得 2000 元，則多賺取 1000 元。

二、挑戰關卡 1 失敗，接著挑戰關卡 2(累計花費 3000 元)，
　　挑戰關卡 2 成功，獲得 4000 元，則此輪挑戰共賺取 1000 元。

…依此類推。

也就是說，小明成功過關一次就會賺取 1000 元。

$1000+2000+\cdots+2^7\times1000 = 1000(1+2+\cdots+2^7) = 1000\times\frac{2^8-1}{2-1} = >55000$

>55000 7. 當小明持續採用該策略，在某一輪小明已經連續挑戰失敗 8 個關卡，請問小明在 8 個關卡總共花費了多少金錢。

10 8. 在某一輪開始的時候，小明身上有 123 萬元，則小明在連續挑戰失敗幾個關卡之後，就無法依照該策略來挑戰下一關卡？

9. 因為有時間的限制，小明帶了 5000 元來玩遊戲，總共玩了 5 個關卡(不論幾輪，玩到第 5 次就結束)。請問小明在離開時，身上可能有多少錢。

10000
9000
8000
7000
6000
5000
4000
0

可以指出 Max 10000 min 0 每一個舉例

8. $1000(1+2+\cdots+2^{n-1}) < 1230000$

$2^n-1<1230,\quad n\le10$

9. 0 0 0 0 0 ⇒ 5000 + 5000

1x
(x 0) 0 0 0 ⇒ 4000 + 5000
0 0 0 0 x ⇒ 3000 + 5000

2x
(x 0)(x 0) 0 ⇒ 3000 + 5000
(x 0) 0 0 x ⇒ 2000 + 5000
~~(x x 0) 0 0 ⇒ 3000 + 5000~~
0 0 0 x x ⇒ 0 + 5000

3x
(x 0) 0 x x −1000 + 5000
(x 0)(x 0) x 1000 + 5000
~~(x x 0)(x 0) 2000 + 5000~~
~~(x x 0) 0 x 1000 + 5000~~
~~(x x x 0) 0 2000 + 5000~~
0 0 x x x −5000 + 5000

4x
~~x x x x 0 1000 + 5000~~
~~(x x x 0) x 0 + 5000~~
~~(x x 0) x x −2000 + 5000~~
~~(x 0) x x x −2000 + 5000~~
~~0 x x x x −3000 + 5000~~

5x 不可能

**第 10 至 12 題為題組**

小明今年 22 歲，月薪 40000 元，他參考了專家提出的財務分配的「50-20-30 法則」，即每個月的薪水的比例分配為必要開銷(占 50%)、投資(占 20%)、自行運用(占 30%)。

他將每個月的必要開銷列表如下：

| 支出項目 | 房租 | 水電費 | 伙食費 | 交通費 | 手機月租費 |
|---|---|---|---|---|---|
| 費用 | 9000 元 | 1000 元 | 7500 元 | 2000 元 | 500 元 |

在投資項目，他選了最常見的存股標的「金融股」，其年利率約 5%，高於銀行的定存年利率 1%。他概算如果投入本金 1 萬元並將每年領到的利息繼續投入以達到複利效果，則 n 年後可領回的本利和列表如下。

| n | 10 | 25 | 28 | 36 | 37 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 累積的本利和 | 約 1.6 萬元 | 約 3.4 萬元 | 約 4 萬元 | 約 5.8 萬元 | 約 6 萬元 | 約 7 萬元 |

40000−9000−1000−7500−2000−500=20000

2 4 5

10. 根據文章敘述，關於小明每個月的財務狀況，選出正確的選項。
   (1)小明可用於「投資」的資金有 12000 元 $40000\times 20\% = 8000$
   (2)小明可「自行運用」的資金有 12000 元 $40000\times 30\% = 12000$
   (3)小明每個月的「必要開銷」費用都會透支 剛好
   (4)如果小明想從「自行運用」的資金支出，購買價值 42400 元的最新款 iPhone 手機，那麼最少需要領到 4 次的薪水才能購買 $12000\times 3 \sim 12000\times 4$
   (5)如果每月除了必要開銷外，小明不作其他花費，則 30 歲前即可存到第一桶金 100 萬元
   $20000\times 12\times 8 \geq 1000000$ (o)

320

11. 小明如果一個月的投資資金投資在金融股，與投資在銀行定存相比，一次的利息相差多少元？
$8000\times(0.05-0.01)=320$

37

12. 小明的退休目標是投資基金的總資產超過 1000 萬，他決定從年初開始每月投入當月的投資資金在金融股存股，每次領到的利息也投入存股當中。假設金融股每年年底發放利息，請問幾年後，小明可以達到退休目標？

每年投 $12\times 8000 = 9.6$ 萬

$9.6\left[(1.05)^n+(1.05)^{n-1}+\cdots+(1.05)\right] > 1000$

$9.6\times\dfrac{1.05\,(1.05^n-1)}{1.05-1} > 1000$

$(1.05)^n-1 > \dfrac{50}{1.05\times 9.6} = 4.96$

$(1.05)^n > 5.96\cdots$

$1.05^{36} < 5.96\cdots < 1.05^{37}$

故 37 年