

## 8 三角函數

# 高三彈性數學

班級:

座號:

姓名:

### 第 1 至 3 題為題組

降噪耳機的原理是當耳機接收到外部聲波後，經過晶片運算，然後由發聲器輸出相反的聲波抵銷。接收到輸出之間的時間差越小，則降噪的效果越好。而如果能再對降噪後耳道內的聲波進行分析，進行機器學習後以預測的方式優化，則降噪的效果就能達到極致。

假設目前有個噪音固定以  $y = 40 \sin(10\pi x)$  的方式傳遞，其中  $x$  為時間，單位為秒， $y$  為音量大小，且單位為分貝。

1. 噪音  $y = 40 \sin(10\pi x)$  的週期為多少秒？

- (1) 1    (2)  $\frac{1}{2}$     (3)  $\frac{1}{3}$     (4)  $\frac{1}{4}$     (5)  $\frac{1}{5}$

2. 已知  $\sin 0.1\pi \approx 0.31$ ， $\cos 0.1\pi \approx 0.95$ 。若

$\sin(10\pi x) - \sin[10\pi(x - 0.01)] = a \sin(10\pi x) + b \cos(10\pi x)$ ，根據上述數值，求數對  $(a, b)$ 。

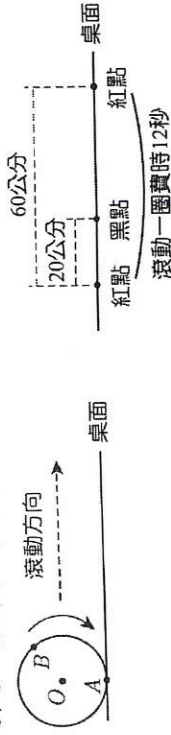
3. 若耳機進行降噪時有 0.01 秒的延遲，則噪音  $y = 40 \sin(10\pi x)$  降噪後的聲波為  $y = 40 \sin(10\pi x) - 40 \sin[10\pi(x - 0.01)]$ 。降噪後的振幅約為降噪前的多少%？

| 題號                                      | 作答區  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   | 1  | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | + |
| 1                                       | <p>1. <math>\frac{2\pi}{10\pi} = \frac{1}{5}</math>, <math>\frac{10}{2\pi}</math> (5)</p> <p>2. <math>\sin(10\pi x) - [\sin(10\pi x) \cos(0.1\pi) - \cos(10\pi x) \sin(0.1\pi)]</math><br/> <math>= \sin(10\pi x) - 0.95 \sin(10\pi x) + 0.31 \cos(10\pi x)</math><br/> <math>= 0.05 \sin(10\pi x) + 0.31 \cos(10\pi x)</math><br/> <math>(a, b) = (0.05, 0.31)</math></p> |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 3                                       | <p>3. <math>\frac{\sqrt{(0.05)^2 + (0.31)^2}}{1} \approx 31.4\%</math></p>   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| <p>答案： 5    a=0.05, b=0.31    31.4%</p> |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

### 第 4 至 6 題為題組

如下左圖，有一圓形鐵片在桌上等速滾動，其圓弧上有 A、B 兩點，且 A 點恰在桌面上。為了計算滾動時 A、B 兩點距離桌面的高度，小明設計了一個實驗如下：

- ①將 A 點位置塗上紅色顏料，將 B 點位置塗上黑色顏料。
- ②放一張不計厚度與摩擦力的白紙，將圓形鐵片滾動一次，並記錄滾動所需的時間。結果如下右圖



4. 設此圓形鐵片的半徑為  $r$  公分， $AB$  所對的圓心角為  $\theta$ ，則數對  $(r, \theta)$  為？

5. 已知 A 點距離桌面的高度與時間的函數為  $h_A = a_1 \sin(b_1 x + c_1) + d_1$ ，其中  $h_A$  代表 A 點距離桌面的高度(單位：公分)，且  $a_1, b_1$  皆為正數，

$x$  表示開始滾動後過了幾秒的時間，且  $0 \leq c_1 \leq 2\pi$ ，試求數對  $(a_1, b_1, c_1, d_1)$ 。

6. 呈上題，設 B 點距離桌面的高度與時間的函數為  $h_B = a_2 \sin(b_2 x + c_2) + d_2$ ，其中  $h_B$  代表 B 點距離桌面的高度(單位：公分)，且  $a_2, b_2$  皆為正數，且  $0 \leq c_2 \leq 2\pi$ ，試求數對  $(a_2, b_2, c_2, d_2)$ 。

[提示]可將 B 點高度視為  $k$  秒前的 A 點高度。

| 題號 | 作   | 答   | 區  |
|----|---|---|--|
| 4  | $\theta = \frac{20}{60} \times 2\pi = \frac{2\pi}{3}$ $2\pi r = 60, \quad r = \frac{30}{\pi}$   | $\left( \frac{30}{\pi}, \frac{2\pi}{3} \right)$ |  |
| 5  | $a_1 \text{ 振幅} = r = \frac{30}{\pi}$ $12 \text{ 秒 週期} = \frac{2\pi}{b_1} \Rightarrow b_1 = \frac{\pi}{6}$ $\text{其 初 相: } y = \frac{30}{\pi} \Rightarrow d_1 = \frac{30}{\pi}$ $x=0 \text{ 時 } \sin(b_1 x + c_1) = -1$ $c_1 = \frac{3}{2}\pi$ $\left( \frac{30}{\pi}, \frac{\pi}{6}, \frac{3}{2}\pi, \frac{30}{\pi} \right)$ |   |  |
| 6  | $\therefore h_B = \frac{30}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{6}(x-4) + \frac{3}{2}\pi\right) + \frac{30}{\pi}$ $= \frac{30}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{6}x + \frac{5}{6}\pi\right) + \frac{30}{\pi}$ $\left( \frac{30}{\pi}, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{30}{\pi} \right)$   | <p>B 可視為 A 桌 4 秒前高度</p>                         | <p>答案：(30/pi, 2pi/3) (30/pi, pi/6, 3pi/2, 30/pi)<br/>(30/pi, pi/6, 5pi/6, 30/pi)</p> |

## 8 三角函數

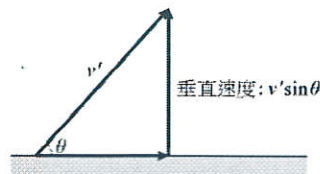
### 補充試題

#### 第 7 至 8 題為題組

在不考慮空氣阻力的情況下，在平地上以同樣的初始速率斜向上拋出一個物體，你知道什麼樣的角度才可以讓該物體有最長的水平飛行距離？我們可以透過以下推導，來逐步找到答案：

步驟一：假設初始速度為  $v'$  與水平地面夾角為  $\theta$ ，

將初始速度拆成水平初速與垂直初速，如下圖：



步驟二：根據垂直方向的等加速度運動來分析，物體在最高點時垂直速度為 0，根據等加速度公式  $v = v_0 + at$ ，其中  $a$  為重力加速度  $-g$ ， $t$  為地面到最高點的時間。可推得向上飛行時間為

$t = \frac{v' \sin \theta}{g}$ ，而向下飛行時間在沒有空氣阻力的情況下，也會等於向上飛行的時間。故總飛行時間為

$$\frac{2v' \sin \theta}{g}。$$

步驟三：最長的水平飛行距離為水平初速乘以飛行時間。

7. 請問步驟一中的水平初速應該為下列何者？(1) 0 (2)  $v' \cos \theta$  (3)  $v' \sin \theta$  (4)  $v' \tan \theta$  (5)  $v'$

8. 步驟三尚未完成推導，請將步驟三的推導完成，並找到當  $\theta$  為多少時，會有最長的水平飛行距離。

答案：(2)  $\theta = 45^\circ$  時， $\text{MAX} = \frac{v'^2}{g}$

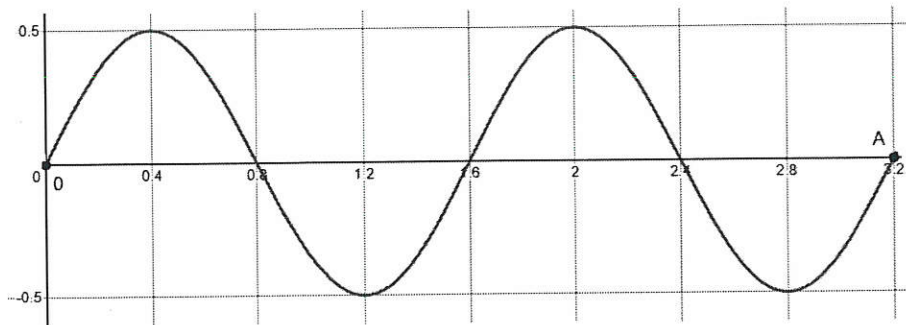
$$\text{a. } v' \cos \theta$$

$$\text{b. } v' \cos \theta \cdot \frac{2v' \sin \theta}{g} = \frac{(v')^2}{g} \sin 2\theta \quad \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\therefore \sin 2\theta = 1 \quad 2\theta = 90^\circ \quad \theta = 45^\circ$$

第 9 至 10 題為題組

戰繩運動是一種體能訓練，用於增加核心穩定和速度爆發，必須利用核心肌群去穩定身體，甩動繩子，運用爆發力，讓繩子呈現一波波的狀態，如下圖所示。利用波的形狀去評估訓練者的練習狀況，現將此波形標示於坐標平面上，試回答下列問題：



9. 上圖中，若繩子的波形之函數為  $y = f(x) = a \sin bx$ ，其中  $a$  和  $b$  皆為正數，則  $ab =$   
 (1)  $2\pi$    (2)  $\pi$    (3)  $\frac{5\pi}{4}$    (4)  $\frac{5}{8}\pi$    (5)  $\frac{1}{2}$
10. 上圖中，若繩子的一端綁在牆壁的  $O$  點，手拉另一端的  $A$  點，若訓練者要增加訓練強度，在  $\overline{OA}$  和振幅固定情況下，想讓波形由兩個週期變為四個週期，所產生新的波形之函數為  $y = g(x) = a \sin cx$ ，其中  $a$  和  $c$  皆為正數，試求出  $c$  值和畫出  $y = g(x)$  的圖形。

答案： (4)  $c = 5\pi/2$

9. 振幅  $a = 0.5$   
 週期  $\frac{2\pi}{b} = 1.6$ ,  $b = \frac{2\pi}{1.6} = \frac{10}{8}\pi = \frac{5}{4}\pi$   
 $ab = \frac{5}{8}\pi$ , 選 (4)

10.  $\frac{2\pi}{c} = 0.8$ ,  $c = \frac{2\pi}{0.8} = \frac{10}{4}\pi = \frac{5}{2}\pi$