

9 指數函數

高三彈性數學

班級:

座號:

姓名:

第 1 至 3 題為題組

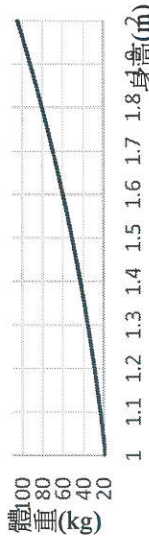
以身體質量指數 (Body Mass Index, BMI) 來衡量一個人的肥胖標準，是目前在國際上廣為認定的方法。英國牛津大學數學家尼克·崔佛生 (Nick Trefethen) 在 2013 年提出一項新制的 BMI 計算方法，他指出舊

制的 BMI 計算公式為 $BMI = \frac{\text{體重(kg)}}{[\text{身高(m)}]^2}$ ，但此計算公式卻忽略了高個

子本身骨架較大，可能造成 BMI 值較大的問題；因此，他提出新制的

BMI 計算方法，其計算公式為 $BMI = \frac{\text{體重(kg)} \times 1.3}{[\text{身高(m)}]^{2.5}}$ 。

已知 BMI 超過 24 的為體重過重，使用新制的計算方式可將體重和身高的函數表示為右圖。



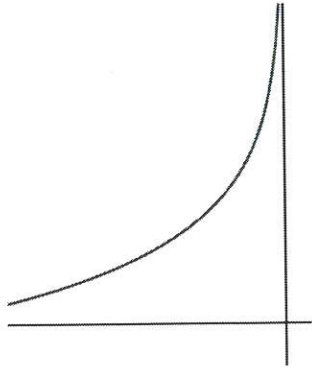
(參考數值：1.1⁵ ≈ 1.61, 1.2⁵ ≈ 2.49, 1.3⁵ ≈ 3.71, 1.4⁵ ≈ 5.38, 1.5⁵ ≈ 7.59)

- 請從下列五人的身高體重資訊中，選出的體重過重的人。
 - 甲：171 公分，61 公斤
 - 乙：180 公分，85 公斤
 - 丙：163 公分，70 公斤
 - 丁：150 公分，43 公斤
 - 戊：183 公分，78 公斤
- 巨石強森的身高為 196 公分，體重為 118 公斤，請用新制計算出他的 BMI 指數。(四捨五入到小數後第一位)
- 請計算出身高超過多少公分後，使用新制的 BMI 會比舊制的還要低。

題號	作答區									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	<p>1. 由圖可知，選擇曲線上方之點為選(2)(3)</p> <p>2. $BMI = \frac{118 \times 1.3}{1.96^{\frac{5}{2}}} = \frac{118 \times 1.3}{1.4} \approx \frac{118 \times 1.3}{5.78} \approx 28.5$</p> <p>3. $\frac{y \times 1.3}{h^{2.5}} < \frac{y}{h^2} \Rightarrow h^{0.5} > 1.3, h > 1.69 (m)$</p>									
3	<p>答案：(2)(3) 28.5 169cm</p>									

第 4 至 6 題為題組

某款 APP 的新增用戶中，在 x 天後仍啟動該 APP 的人數比例 $r(x)\%$ ，叫做 x 天後留存率，而 $r(x)$ 稱為留存函數。一般而言，留存函數 $r(x)$ 的曲線會快速下降，如下圖所示，經常被用來檢驗用戶的活躍程度。



某款 APP 的留存函數 $r(x)$ 滿足 $r(1) = 40$ 及 $r(7) = 20$ (即 1 天後與 7 天後的留存率為 40% 及 20%)，試回答下列問題。

4. 已知該款 APP 留存函數 $r(x)$ 符合 $r(x) = a \times 2^{b(1-x)}$ 的數學模型，試求實數 a 與 b 的值。
5. 試求 $r(13)$ 的值。
6. 留存率有個 40-20-10 法則是指：1 天，7 天，31 天後的留存率都不得低於 40%、20%、10%。試判斷該款 APP 是否符合 40-20-10 法則。

題號	作 答 區
4	$4. \begin{aligned} r(1) &= a \times 2^0 = 40, & a &= 40 \\ r(7) &= a \times 2^{-6b} = 20, & 2^{-6b} &= \frac{1}{2}, & 6b &= 1, & b &= \frac{1}{6} \end{aligned}$
5	$5. \begin{aligned} r(13) &= a \times 2^{-12b} = 40 \times 2^{-2} = 10 \\ 6. \begin{aligned} r(31) &= a \times 2^{-30b} = 40 \times 2^{-5} = \frac{40}{32} < 10 \\ &\text{不合.} \end{aligned} \end{aligned}$
6	<p>答案： $a=40, b=1/6$ $r(13)=10$ 不合</p>

9 指對數函數

補充試題

第 7 至 9 題為題組

評估病毒傳播模式有以下兩個重要指標，簡述定義如下：

(一)世代間隔(以 S 表示)：從第一波感染到第二波感染出現的時間。

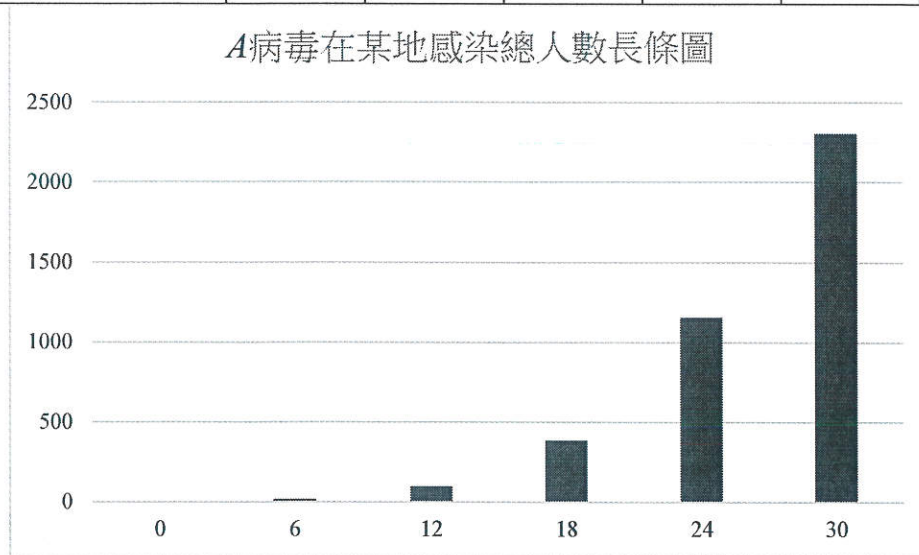
(二)基礎再生數(以 R_0 表示)：一個個案在整個患病的病程中平均可以傳給幾個人的指標。

若 $R_0 > 1$ ，則感染個數成指數性成長，每經過 1 次世代間隔(S)後，新感染人數將變成 R_0 倍。

R_0 能決定疫情指數成長的程度，但不是常數，在疫情爆發時，適當的介入可使 R_0 下降，例如隔離治療、環境消毒、個人防護具等。而 R_t 值則是加上時間考量，進一步觀察隨著時間變化的 R_0 ，推估加上時間考量的基礎再生數(R_t)另有下面的指數評估公式：

$$\log_2 \frac{N(t)}{N(0)} = (R_t - 1) \cdot \frac{t}{S}, \text{ 其中 } S: \text{世代間隔}, N(t): \text{在 } t \text{ 時間點下的罹病個案總數}$$

時間 t 天	0	6	12	18	24	30
總感染數 $N(t)$ 人	2	16	96	384	1152	2304



7. 若病毒 A 的世代間隔(S)為 6 天，基礎再生數(R_0)為 4，請問經過 30 天後，新感染人數將變為多少倍？

(1)20 (2)625 (3)1024 (4)1296 (5)4096

$\frac{30}{6} = 5 \text{ 次}, 4^5 = 1024, \text{ 選 (3)}$

8. 承上題，某地方發現病毒 A 後，地方政府隨即進行三級警戒，感染總人數如上圖及上表。根據傳染病學，若 R_t 呈現遞減趨勢，代表三級警戒有效果。試計算第 6 天的 R_t 值(四捨五入至小數點後第一位)。

$$8. R_6 \Rightarrow \log_2 \frac{16}{2} = (R_6 - 1) \cdot \frac{6}{6}$$

$$\Rightarrow R_6 = 4.$$

9. 說明並判斷前 18 天進行三級警戒是否有效。

答案：(5) $R_6=4.0$ $R_{12}=3.79$ $R_{18}=3.53$ 有效

$$9. \log_2 \frac{96}{2} = (R_{12} - 1) \times 2 \Rightarrow R_{12} = \frac{\log_2 48}{2} + 1$$

$$\log_2 \frac{384}{2} = (R_{18} - 1) \times 2 \Rightarrow R_{18} = \frac{\log_2 192}{2} + 1$$

第 10 至 12 題為題組

魚類在水中的游速遠遠超過人類所及。假設某種魚類的游速可用函數 $v = \frac{5}{3} \log_2 \frac{x}{100}$ (m/s) 表示，其中 x 表示耗氧量的單位數。

10. 該魚類靜止時的耗氧量的單位數是多少？(單選)
(1) 50 (2) 30 (3) 90 (4) 100 (5) 110
11. 當這條魚的耗氧量是 1600 單位數，其游速是多少？
12. 若某種魚類受到威脅時，耗氧量會衝到 12800 單位數，由附表中各種魚類的極速來看，此種魚類最有可能是哪一種？

種類	虎鯨	飛魚	骨魚	鯉魚	巨頭鯨	黃鰭金槍魚	梭魚
游速 (km/hr)	30	35	40	43	47	52	58

答案：(4) 20/3 鯉魚

$$10. \quad 0 = \frac{5}{3} \log_2 \frac{x}{100}, \quad \log_2 \frac{x}{100} = 0, \quad \frac{x}{100} = 1, \quad x = 100$$

$$11. \quad v = \frac{5}{3} \log_2 \frac{1600}{100} = \frac{5}{3} \times 4 = \frac{20}{3}$$

$$12. \quad v = \frac{5}{3} \times \log_2 \frac{12800}{100} = \frac{5}{3} \times 7 = \frac{35}{3} \text{ (m/s)}$$

$$\frac{35}{3} \text{ (m/s)} = \frac{35}{3} \times \frac{3600}{1000} = 42 \text{ (km/hr)} \Rightarrow \text{鯉魚}$$