100年學測

1、期望值即平均.

$$\frac{3\times 50+2\times 100}{5}=70$$

(1) #

2、

$$4(x^2+1)+(x+1)^2(x-3)+(x-1)^3$$

$$=4x^2+4+(x^2+2x+1)(x-3)+(x^3-3x^2+3x-1)$$

$$=4x^2+4+x^3+2x^2+x-3x^2-6x-3+x^3-3x^2+3x-1$$

$$=2x^3-2x=2x(x^2-1)=2x(x-1)(x+1)$$

(5) #

3、

$$(a_{n+1})^2=\frac{1}{\sqrt{10}}(a_n)^2 \Rightarrow \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

取 $\log \Rightarrow \log\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2=\log\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow 2(\log a_{n+1}-\log a_n)=\frac{-1}{2}$

$$\therefore \log a_{n+1}-\log a_n=\frac{-1}{4} \Rightarrow b_{n+1}-b_n=\frac{-1}{4}$$

後項－前項＝定值，即為等差數列，公差 $\frac{-1}{4}$

(2) #

4、

$$\left(\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}\right)\left(\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)=0$$

$$\therefore \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=0 \quad \text{or} \quad \frac{x}{3}-\frac{y}{4}=0 \quad \text{or} \quad \frac{x}{3}+\frac{y}{4}=0$$

點 (0,0)　　直線　　直線

過 (0,0)

(3) #

5、

(1) $3^7=2187$ $\therefore 3^7>7^3$ (x)

$7^3=243$

(2) 5^{10}、10^5

※次方無法處理 ⇒ 取 log.

$\log 5^{10}=10\log 5=10\times 0.699=6.99$ $\therefore 5^{10}>10^5$ (x)

$\log 10^5=5$

(3) 同上，次方無法處理 ⇒ 取 log.

$\log 2^{100}=100\cdot\log 2=30.1$ $\therefore 2^{100}>10^{30}$ (x)

$\log 10^{30}=30$

(4) $\log_2 3=\dfrac{\log 3}{\log 2}=\dfrac{0.4771}{0.3010}\neq 1.5$ (x)

(5) $\log_2 11<3.5$ 可想成 $11<2^{3.5}$ (同對或同錯)

$2^{3.5}=8\sqrt{2}=8\times 1.414=11.312$ (o)

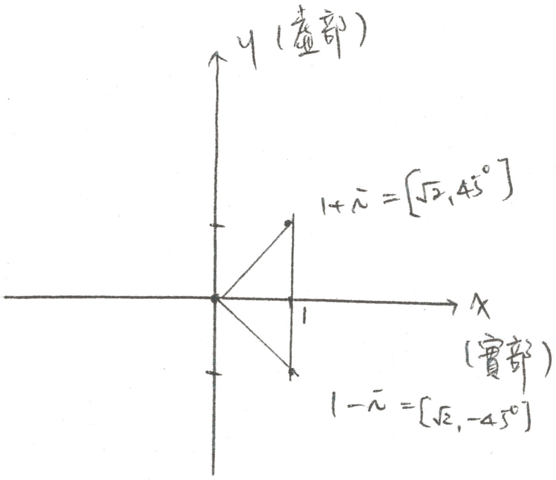
(5) #

6. 61個數的中位數為第 $\frac{61+1}{2}=31$ 個數.

第25個數	0.2019
26	0.2034
27	0.2051
28	0.2085
29	0.2123
30	0.2137
31	0.2164

(2) #

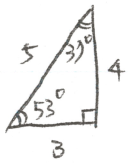
7.



(1) $\cos 60^\circ = [\frac{1}{2}, 0^\circ]$ (o)

(2) $\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ = [1, 50^\circ]$ (x)

※



(3) $\dfrac{4-3i}{5} = \dfrac{4}{5} + \dfrac{-3}{5}i = [1, -37^\circ]$ (o)

(4) $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = [1, 60^\circ]$ (x)

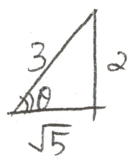
(5) $(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)^{25} = \cos 750^\circ + i\sin 750^\circ = [1, 30^\circ]$ (o)

$= \cos 30^\circ + i\sin 30^\circ$

(1)(3)(5) ※

8.

$\sin\theta = \frac{-2}{3}, \ \cos\theta > 0 \Rightarrow \theta \in \mathrm{IV}$,



(1) $\tan\theta < 0$ (o)

(2) $\tan^2\theta = (-\frac{2}{\sqrt{5}})^2 = \frac{4}{5} > \frac{4}{9}$ (o)

(3) $\left.\begin{array}{l} \sin^2\theta = \frac{4}{9} \\ \cos^2\theta = \frac{5}{9} \end{array}\right\} \sin^2\theta < \cos^2\theta$ (x)

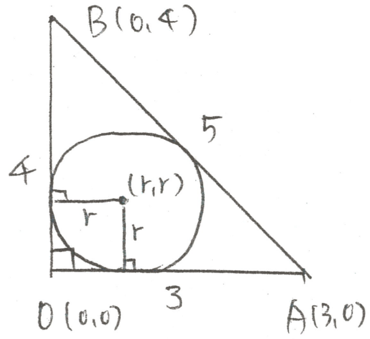
(4) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cdot\cos\theta = 2(\frac{-2}{3})(\frac{\sqrt{5}}{3}) = \frac{-4\sqrt{5}}{9} < 0$ (x)

(5) ∵ $|\tan\theta| < 1$ ∴ $\underline{\underline{-45^\circ}} + 360^\circ k < \theta < \underline{\underline{0^\circ}} + 360^\circ k \Rightarrow \underline{\underline{-90^\circ}} + 720^\circ k < 2\theta < \underline{\underline{0^\circ}} + 720^\circ k$

∴ θ, 2θ 均在第四象限 (x)

(1)(2) ※

9.



(1) 外接圓半徑 (R)

※ 與 $\triangle ABC$ 面積有關之公式

$\triangle ABC = \frac{1}{2}\times$底$\times$高$= \frac{1}{2}ab\sin\theta = \frac{abc}{4R} = r\cdot s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(其中 $s = \frac{a+b+c}{2}$)

$\therefore \triangle OAB$面積$= \frac{1}{2}\times 3\times 4 = \frac{3\times 4\times 5}{4R} \Rightarrow R = \frac{5}{2}$ (X)

(2) 外接圓圓心為中垂線之交點

$\overline{OA}$ 之中垂線 : $x = \frac{3}{2}$

$\overline{OB}$ 之中垂線 : $y = 2$

$\Rightarrow$ 外心 $(\frac{3}{2}, 2)$

$\therefore$ 不在 $y = x$ 上 (X)

(3) $4(\frac{3}{2}) + 3\cdot 2 = 12$ $\therefore$ 外心在 $4x+3y=12$ 上 (O)

(4) 內切圓半徑 (r)

$\Rightarrow$ 內切圓圓心 (r,r)

$\triangle OAB$面積$= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 = r\cdot\left(\frac{3+4+5}{2}\right) \Rightarrow r = 1$

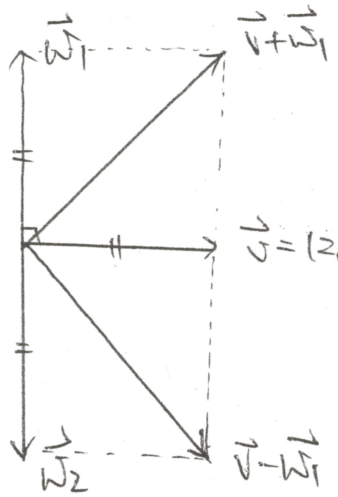
$\Rightarrow$ 內心 $(1,1)$, 在 $y=x$ 上 (O)

(5) $4\cdot 1 + 3\cdot 1 = 7 \neq 6$ $\therefore$ 不在 $4x+3y=6$ 上 (X)

(3)(4) #

100年學測

10、



(1) $\vec{w}$ 有兩種可能

$\Rightarrow \vec{w}=\pm(\sqrt{5},-2)$

$=(\sqrt{5},-2)$ or $(-\sqrt{5},2)$ (o)

(2) 如左圖，由向量加法知

$|\vec{v}+\vec{w}|=|\vec{v}-\vec{w}|=\sqrt{2}|\vec{v}|$ (o)

(3) $\vec{v}+\vec{w}$ 與 $\vec{w}$ 夾角為 45° (x)

(4) $\vec{u}=a\vec{v}+b\vec{w} \Rightarrow |\vec{u}|=|a\vec{v}+b\vec{w}|$

(※看到求 $|\vec{u}|$，想到 $|\vec{u}|^2$)

$\therefore |\vec{u}|^2=|a\vec{v}+b\vec{w}|^2=a^2|\vec{v}|^2+2ab\,\vec{v}\cdot\vec{w}+b^2|\vec{w}|^2$

$=a^2|\vec{v}|^2+b^2|\vec{w}|^2$ ($\because \vec{v},\vec{w}$ 垂直 $\therefore \vec{v}\cdot\vec{w}=0$)

$=9(a^2+b^2)$

$\therefore |\vec{u}|=3\sqrt{a^2+b^2}$ (x)

(5) ① case 1 : $\vec{w}=(\sqrt{5},-2)$

$(1,0)=c(2,\sqrt{5})+d(\sqrt{5},-2)$ $\begin{cases} 2c+\sqrt{5}d=1 \\ \sqrt{5}c-2d=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ c,d 同. $\Rightarrow$ c,d 同號

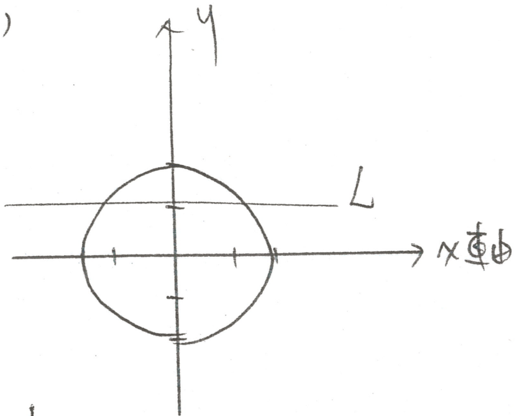
② case 2 : $\vec{w}=(-\sqrt{5},2)$

$(1,0)=c(2,\sqrt{5})+d(-\sqrt{5},2)$ $\begin{cases} 2c-\sqrt{5}d=1 \\ \sqrt{5}c+2d=0 \Rightarrow d=-\frac{\sqrt{5}}{2}c \end{cases}$ $\Rightarrow 2c+\frac{5}{2}c=1 \Rightarrow c>$ (o)

(1)(2)(5)#

11.

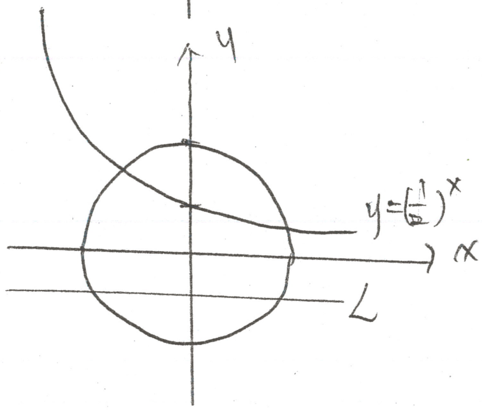
(1)



取 L 平行 x軸 (如: $y=1$)

即可不相交於 x軸. (X)

(2)

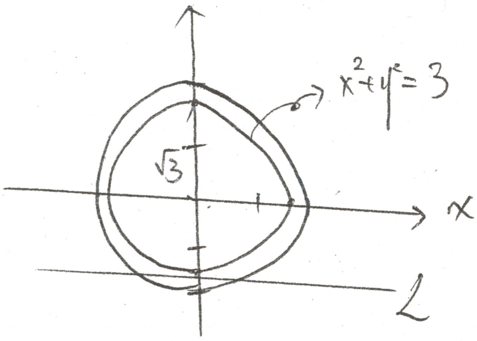


取 L 平行 x軸 且在 x軸下方

(如: $y=-1$)

即可不相交於 $y=(\frac{1}{2})^x$ (X)

(3)

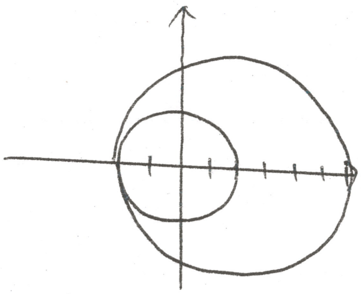


取 L 平行 x軸 且在小圓與大圓之間

(如: $y=-1.8$)

即可不相交於 $x^2+y^2=3$ (X)

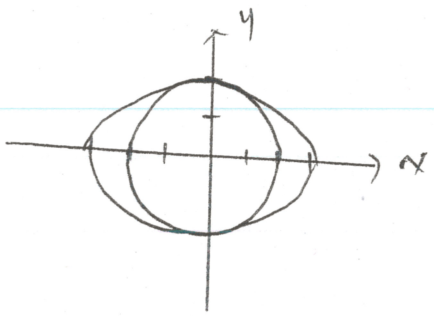
(4)



$(x-2)^2+y^2=16$ 及 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

均包含 $x^2+y^2=4$

∴ 直線 L 必與 (4)(5) 圖形相交



(4)(5) #

100年學測

12、

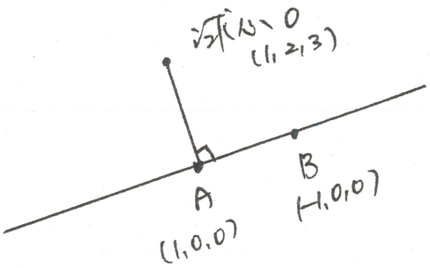
(1) $(0,0,0)$ 代入 $\Rightarrow (-1)^2+(-2)^2+(-3)^2=14$ $\therefore$ $(0,0,0)$ 在球面 S 上 (O)

(2) $(1,0,0)$ 代入 $\Rightarrow 0^2+(-2)^2+(-3)^2=13<14$ $\therefore$ $(1,0,0)$ 在球面 S 內部 (X)

(3) $B(-1,0,0)$ 代入 $\Rightarrow (-2)^2+(-2)^2+(-3)^2=17>14$ $\therefore$ B 在球面 S 外部

$\because$ A、B 在球內、外 $\therefore$ $\overline{AB}$ 必與球面 S 相交 (O)

(4) 點到直線之最短距離 $\Rightarrow$ 必定垂直



$\therefore$ 若 A 為直線 AB 上距離至球心最短

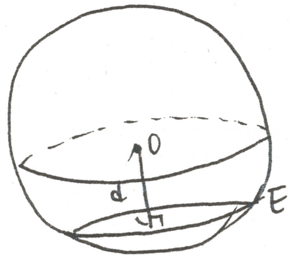
$\Rightarrow \overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AO}=(0,2,3)$

$\overrightarrow{AB}=(-2,0,0)$

$\therefore \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ (O)

(5)



球心至平面距離越小，則截圓面積越大.

(d)

球心到 xy 平面之距 $d_{xy}=3$

yz $d_{yz}=1$

zx $d_{zx}=2$

$\therefore$ 與 yz 所截的圓面積最大 (X)

(1)(3)(4) ※

13. $f(x)=x(x-1)(x+1)$

(1) $f(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}-1)(\frac{1}{\sqrt{2}}+1)<0$ (X)

(2) $f(x)=2 \Rightarrow x(x-1)(x+1)=2 \Rightarrow x^3-x=2 \Rightarrow x^3-x-2=0$

若有整數解 必為 ±1 or ±2 (整係數一次因式檢驗法)

$x=\pm1, \pm2$ 代入均不滿足方程式 $\Rightarrow f(x)=2$ 無整數解 (X)

(3) $f(x)=x^2+1 \Rightarrow \underbrace{f(x)-x^2-1}_{三次式}=0 \Rightarrow$ 必有實根（虛根共軛）

(○)

(4) $f(x)=x \Rightarrow x(x-1)(x+1)=x \Rightarrow x(x-1)(x+1)-x=0$

$\Rightarrow x\left[(x-1)(x+1)-1\right]=0 \Rightarrow x(x^2-2)=0$

$\Rightarrow x=0,\ \pm\sqrt{2}$ (×)

(5) $f(a)=a(a-1)(a+1)=2$

$f(-a)=-a(-a-1)(-a+1)$

$=-\left[a(a+1)(a-1)\right]=-f(a)=-2$ (×)

(3) #

第貳部分：選填題

A. 首項 a，公比 r $(-1<r<1)$ 之無窮等比級數和 $=\dfrac{a}{1-r}$

$$\begin{cases} \dfrac{a}{1-r}=5 & —① \\ \dfrac{a}{1-3r}=7 & —② \end{cases}$$

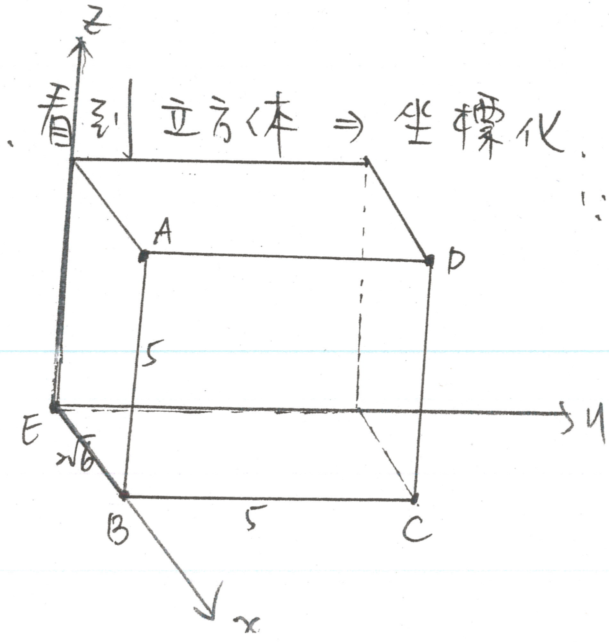
$\dfrac{①}{②} \Rightarrow \dfrac{1-3r}{1-r}=\dfrac{5}{7} \Rightarrow 7-21r=5-5r$

$\Rightarrow 16r=2 \Rightarrow r=\dfrac{1}{8}$，$a=\dfrac{35}{8}$

$\therefore \dfrac{a}{1-2r}=\dfrac{\frac{35}{8}}{1-\frac{2}{8}}=\dfrac{35}{6}$

$\dfrac{35}{6}$ #

B. 看到立方体 ⇒ 坐標化



$\because \cot\angle AEB=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$. 設 $\overline{AB}=5$，$\overline{BE}=2\sqrt{6}$

$E(0,0,0)$，$C(2\sqrt{6},5,0)$，$D(2\sqrt{6},5,5)$

$\cos\angle CED=\dfrac{\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}}{|\overrightarrow{EC}||\overrightarrow{ED}|}=\dfrac{24+25+0}{\sqrt{49}\sqrt{74}}=\dfrac{7}{\sqrt{74}}$

$\cot\angle CED=\dfrac{7}{5}$

$\dfrac{7}{5}$ #

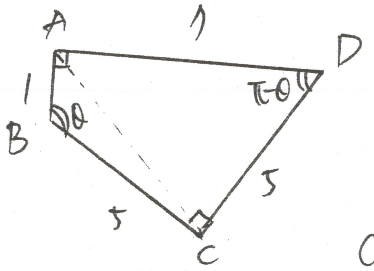
C.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\overset{\text{二男一女}}{C^{20}_{2}C^{15}_{1}}+\overset{\text{一男二女}}{C^{20}_{1}C^{15}_{2}}}{C^{35}_{3}}=\frac{\frac{20\times19}{\cancel{2}}\times15+20\times\frac{15\times14}{\cancel{2}}}{\frac{35\times34\times\cancel{33}\,11}{1\times\cancel{2}\times\cancel{3}}}=\frac{20\times19\times15+20\times15\times14}{35\times34\times11}$$

$$=\frac{\overset{10}{\cancel{20}}\times\overset{3}{\cancel{15}}\times\overset{3}{\cancel{(19+14)}}}{\underset{7}{\cancel{35}}\times\underset{17}{\cancel{34}}\times\cancel{11}}=\frac{90}{119}$$

$\frac{90}{119}$ #

D.



設 $\angle ABC=\theta \Rightarrow \angle ADC=\pi-\theta$

$\overline{AC}=x$

$$\cos\theta=\frac{1^2+5^2-x^2}{2\cdot1\cdot5} \quad (\triangle ABC)$$

$$\cos(\pi-\theta)=\frac{7^2+5^2-x^2}{2\cdot7\cdot5} \quad (\triangle ADC)$$

$$\because \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta \Rightarrow \frac{7^2+5^2-x^2}{2\cdot7\cdot5}=-\frac{1^2+5^2-x^2}{2\cdot1\cdot5}$$

$$\Rightarrow (49+25-x^2)=-7(1+25-x^2)$$

$$\Rightarrow 74-x^2=-182+7x^2 \Rightarrow 8x^2=256$$

$$\Rightarrow x^2=32 \Rightarrow x=\sqrt{32}$$

$\sqrt{32}$ #

E、設 A、B、C 目前有 x, y, z 公克

半年前有 $2x, 3y, 4z$.

一年前有 $4x, 9y, 16z$

$$\begin{cases} x+2y+z=8 & \text{—①} \\ 2x+6y+4z=22 & \text{—②} \\ 4x+18y+16z=66 & \text{—③} \end{cases}$$

②−①×2：$2y+2z=6$

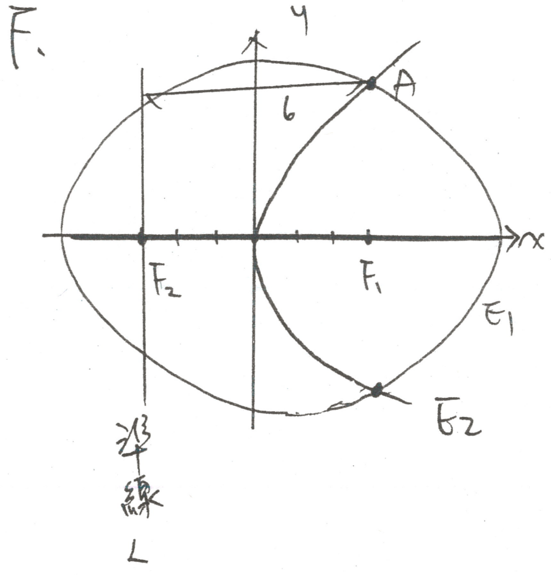
③−①×4：$10y+12z=34$

$\Rightarrow y=1,\ z=2,\ x=4$

$4,\ 1,\ 2$ #

100年學測

F.



設A表其中一交點

∵ A在拋物線上，∴ $\overline{AF}=d(A,L)=6$

又兩焦點 $\overline{F_1F_2}=6$

∴ $\overline{AF_2}=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$

$2a=\overline{AF_1}+\overline{AF_2}=6+6\sqrt{2}$

∴ $a=3+3\sqrt{2}$

$3+3\sqrt{2}$ ※

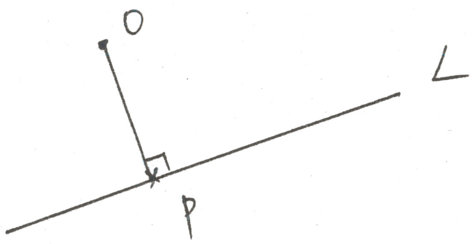
9. 設 $\vec{L}=(2,x,y)$

∵ L在E上 ∴ $\vec{L}\perp\vec{n} \Rightarrow (2,x,y)\cdot(1,-1,1)=0 \Rightarrow 2-x+y=0$

又 P(2,1,1)為L上一點 ∴ L之參數式 $=(2+2t,1+xt,1+yt)$, $t\in R$

P為原點O上最近點 $\Rightarrow \overline{PO}\perp\vec{L} \Rightarrow (2,1,1)\cdot(2,x,y)=0$

$\Rightarrow 4+x+y=0$



$$\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=-1 \\ y=-3 \end{matrix}$$

$(2,-1,-3)$ ※