101 學測

1、 $\sqrt{0.04+0.0625+1} = \sqrt{1.1025} = 1.05$

(2) #

2、 前、後 $= 2\times(1+2+\cdots+10) = 110$

上、下 $= 2\times 10 = 20$

左右 $= 2\times 10 = 20$

$\Big\}$ 150

(5) #

3. 設 $x = 10^{3.032}$

$\Rightarrow \log x = \log 10^{3.032}$

$= 3.032 = 3 + 0.032 = n + \log a$

$\therefore n = 3 \to 4$ 位數

$\log a = 0.032 \to a \approx 1.07\cdots$

(4) #

4. ① 甲平均 < 乙平均：甲的頂峰在乙的左邊

② 甲的標準差 > 乙的標準差：甲的寬度 > 乙的寬度.

③ 甲.乙參加人數一樣：甲.乙下方之面積相等

(1) #

5. $\log x = 2.8 \Rightarrow x = 10^{2.8}$

$\log y = 5.6 \Rightarrow y = 10^{5.6} \Rightarrow \log(x^2+y) = \log(10^{5.6}+10^{5.6})$

$= \log 2\times 10^{5.6} = \log 2 + \log 10^{5.6}$

$= 0.301 + 5.6 = 5.901$

(3) #

6、

(1) 0：兩次相同 (0,0)，(1,1)，⋯，(9,9)

$\Rightarrow \frac{10}{10^2} = \frac{1}{10}$

(2) 1：(0,1)，$(1,\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix})$，⋯，$(8,\begin{smallmatrix}7\\9\end{smallmatrix})$，(9,8)

$\Rightarrow \frac{18}{10^2}$

(3) 4：(0,4)，(1,5)，(2,6)，(3,7)，$(4,\begin{smallmatrix}0\\8\end{smallmatrix})$，$(5,\begin{smallmatrix}1\\9\end{smallmatrix})$，(6,2)，(7,3)，(8,4)，(9,5)

$\Rightarrow \frac{12}{10^2}$

(4) 5：(0,5)，(1,6)，(2,7)，(3,8)，(4,9)，(5,0)，(6,1)，(7,2)，(8,3)，(9,4)

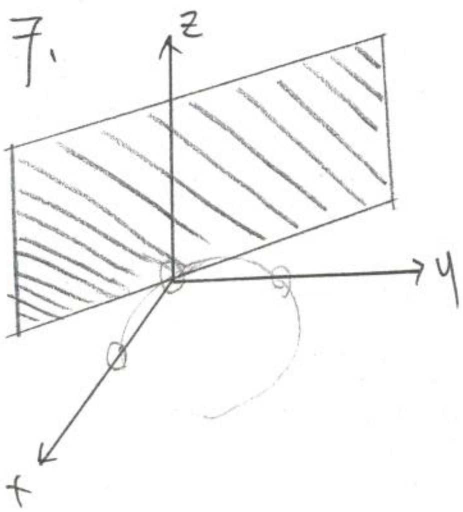
$\Rightarrow \frac{10}{10^2}$

(5) 9：(0,9)，(9,0)

$\Rightarrow \frac{2}{10^2}$

(2) #

7.



如右圖，$3x+4y=0$ 為一包含 z 軸之平面，

且此球與 x 軸、y 軸均會有 2 交點，

但此球切與原點 (0,0,0)，

所以有一交點重覆 ⇒ 故 3 個交點

(3) #

8. $f(x)$ 為實係數方程式，i 是 $f(x)=0$ 之一根 $\Rightarrow$ $-i$ 是 $f(x)=0$ 的另一根．

$\therefore (x-i)(x-(-i))$ 是 $f(x)$ 的因式

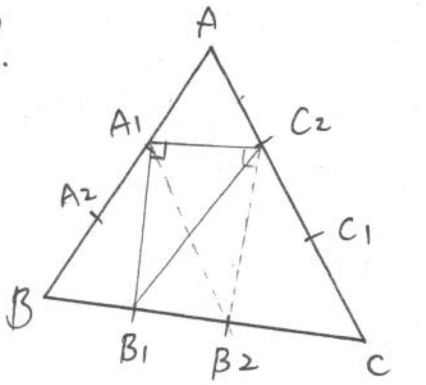
$= x^2+1$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & & & 1 & -5 & 0 \\
\hline
1\ 0\ 1 & 1 & -5 & 1 & a & b \\
 & 1 & 0 & 1 & & \\
\hline
 & & -5 & 0 & a & \\
 & & -5 & 0 & -5 & \\
\hline
 & & & 0 & a+5 & b \\
 & & & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & & & & & 0
\end{array}
$$

$\therefore a=-5$
$b=0$

$\therefore f(x)=(x^2+1)(x^2-5x)=0 \Rightarrow x=\pm i, 5, 0$ 　　(1)(2)(5) #

9.



(1) 共有 $C^2_1 \cdot C^2_1 \cdot C^2_1 = 8$ 種 $\triangle$

A1、A2 挑1　B1、B2 挑1　C1、C2 挑1

(2) $\triangle A_1B_1C_1$ 及 $\triangle A_2B_2C_2$ 為正 $\triangle$
(成比例)

(3) $\triangle A_1C_2B_1$、$\triangle A_1C_2B_2$ 均為直角 $\triangle$ $(30^\circ-60^\circ-90^\circ)$
$\triangle B_1A_2C_2$、$\triangle A_2B_1C_1$ 均為直角 $\triangle$ $(30^\circ-60^\circ-90^\circ)$
$\triangle B_2C_1A_1$、$\triangle C_1B_2A_2$ 均為直角 $\triangle$ $(30^\circ-60^\circ-90^\circ)$

$\therefore$ 8個中有2個正 $\triangle$ 及 6個直角 $\triangle$．

(1)(2) #

10\. 設 $z = r_A(\cos\theta_A + i\sin\theta_A)$. $w = r_B(\cos\theta_B + i\sin\theta_B)$

∵ $\angle AOB = 90^\circ$ ∴ $|\theta_A - \theta_B| = 90^\circ$

(1) $\frac{z}{w} = \frac{r_A}{r_B}\left(\cos(\theta_A-\theta_B) + i\sin(\theta_A-\theta_B)\right)$

∵ $\theta_A - \theta_B = 90^\circ$ or -90° ⇒ $\frac{z}{w}$ 為純虛數 (×)

(2)

$z\cdot w = r_A\cdot r_B(\cos(\theta_A+\theta_B) + i\sin(\theta_A+\theta_B))$

∵ $\theta_A+\theta_B$ 不一定，所以 $z\cdot w$ 可能是任意值 (×)

(3) $(z\cdot w)^2 = (r_A\cdot r_B)^2\cdot\left(\cos(2(\theta_A+\theta_B)) + i\sin(2\theta_A+\theta_B))\right)$

∵ $2(\theta_A+\theta_B)$ 不一定，所以 $(z\cdot w)^2$ 可能是任意值 (×)

(4) $\frac{z^2}{w^2} = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2\cdot\left[\cos(2(\theta_A-\theta_B)) + i\sin(2(\theta_A-\theta_B))\right]$

∵ $2(\theta_A-\theta_B) = 180^\circ$ ⇒ $\frac{z^2}{w^2}$ 必為負實數 (○)

(5) $(z\bar{w})^2 = \left(\frac{z}{w}\right)^2$，同上，必為負實數 (○)　　　(4)(5) #

11\. (1)(2)(3)(4)

∵ $\begin{cases} ax+8y=c \\ x-4y=3 \end{cases}$ 有解

① 無限多解：$\frac{a}{1} = \frac{8}{-4} = \frac{c}{3}$ ⇒ $a=-2$, $c=-6$.

② 一解：$\frac{a}{1} \neq \frac{8}{-4}$ ⇒ $a\neq-2$

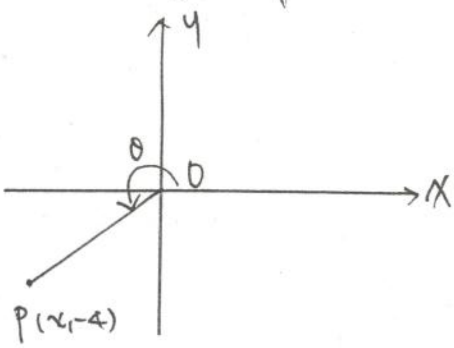
∵ $\begin{cases} -3x+by=d \\ x-4y=3 \end{cases}$ 無解：$\frac{-3}{1} = \frac{b}{-4} \neq \frac{d}{3}$ ⇒ $b=12$ 且 $d\neq-9$

(5) 若 $\begin{cases} ax+8y=c \\ x-4y=3 \end{cases}$ 交於一點 ⇒ $ax+8y=c$ 與 $x-4y=3$ 不平行

又 $\begin{cases} -3x+by=d \\ x-4y=3 \end{cases}$ 無解 ⇒ $-3x+by=d$ 與 $x-4y=3$ 平行

⇒ $ax+8y=c$ 與 $-3x+by=d$ 不平行 ⇒ 必交於一點 (有解) (×)　　　(3)(4) #

12. $\tan\theta = \frac{2}{3}$ 且 $y = -4 \Rightarrow \theta \in$ Ⅲ.



(1) $\tan\theta = \frac{-4}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = -6$ (X)

(2) $\overline{OP} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ (O)

(3) $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-6}{2\sqrt{13}} = \frac{-3}{\sqrt{13}}$ (X)

(4) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2 \cdot \frac{-4}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{-6}{2\sqrt{13}} = \frac{12}{13} > 0$ (O)

(5) $\theta \in$ Ⅲ, $180^\circ + 360^\circ k < \theta < 270^\circ + 360^\circ k$

$\Rightarrow 90^\circ + 180^\circ k < \frac{\theta}{2} < 135^\circ + 180^\circ k$

$k = 0 \Rightarrow 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 135^\circ$

$k = 1 \Rightarrow 270^\circ < \frac{\theta}{2} < 315^\circ$

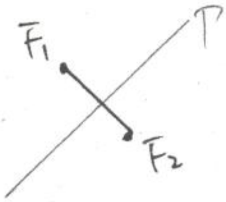
$\Rightarrow \frac{\theta}{2} \in$ Ⅱ, Ⅳ

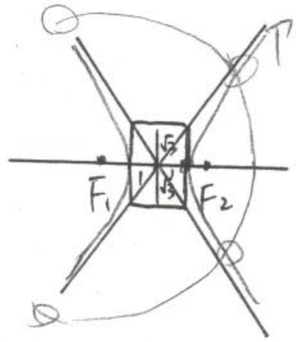
$\cos\frac{\theta}{2}$ 可能正, 可能負 (X)

(2)(4) *

13. $\overline{F_1F_2} = 4 (= 2c)$, $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = d (= 2a)$

(1) $d = 0 \Rightarrow \overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 0 \Rightarrow \overline{PF_1} = \overline{PF_2} \Rightarrow$ 表一直線 ($\overline{F_1F_2}$ 之中垂線)





(2) $d = 1 \Rightarrow a < c \Rightarrow$ 表雙曲線

(3) $d = 2 \Rightarrow a = 1, c = 2, b = \sqrt{3}$ 之雙曲線

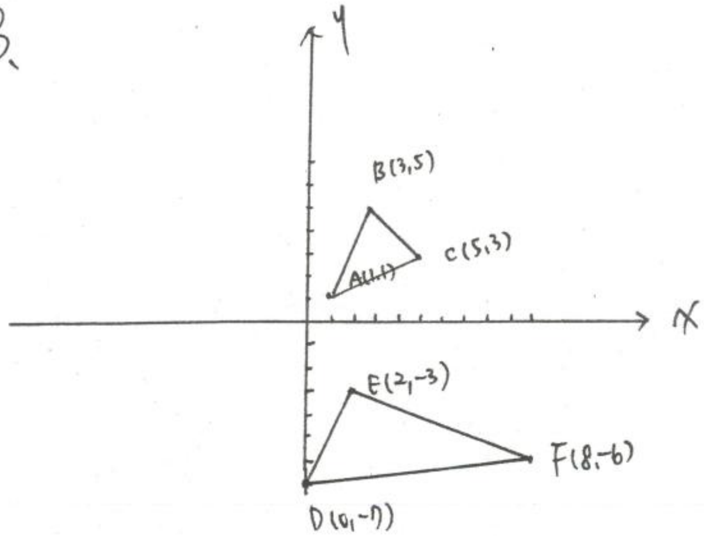
$\Rightarrow$ 4 個交點.

(4) $d = 4 \Rightarrow$

A. 無窮等比級數求和公式 $= \frac{a}{1-r} = \frac{a}{1-0.01} = 1.\overline{2} = 1\frac{2}{9} = \frac{11}{9}$

$\Rightarrow a = \frac{99}{100} \times \frac{11}{9} = 1.21$ *

B、



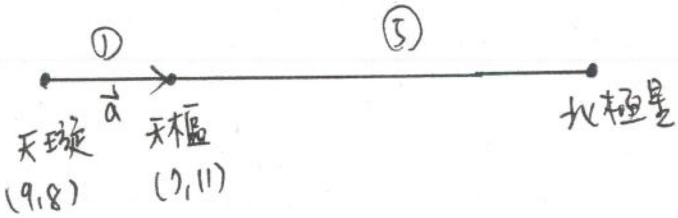
∵ L 與 △ABC 及 △DEF 各恰有一交點

∴ 交點必為頂點.

⇒ 依圖不難看出 $\overline{CF}$ 之斜率最小

∴ $m_{CF} = \frac{3-(-6)}{5-8} = \frac{9}{-3} = \underline{-3}$ #

C、



$\vec{a} = (-2,3)$.

北極星 $=(7,11)+5(-2,3) = \underline{(-3,26)}$ #

D、利用參數式, 設點 $C(t, \frac{1}{2}t^2)$

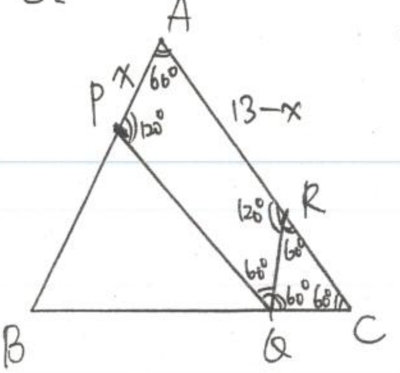
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (6,6)\cdot(t+2, \frac{1}{2}t^2-2)$

$= 6t+12+3t^2-12 = 3t^2+6t = 3(t+1)^2-3$

二次函數求極值⇒配方.

∴ $t=-1$ 時 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 有最小值 -3 $\underline{-1, -3}$ #

E、



∵ $\angle A = 60°$ ⇒ $\angle APQ = 120°$ ⇒ $\angle QRC = 60°$ ⇒ △QRC為正△.
$\angle PQR = 60°$
$\angle QRA = 120°$

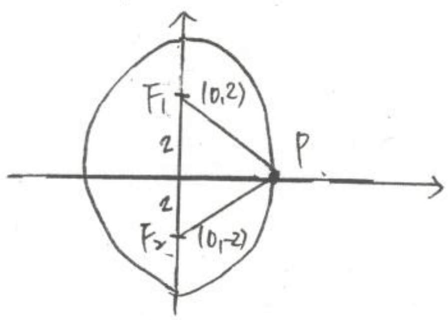
設 $\overline{AP} = x$ ⇒ $\overline{RQ} = \overline{RC} = x$ ⇒ $\overline{AR} = 13-x$

△APR面積 $= \frac{1}{2}\cdot x\cdot(13-x)\cdot\cancel{\sin 60°} = \cancel{\frac{1}{2}}\cdot(20\sqrt{3})$

⇒ $x(13-x) = 40$ ⇒ $x = 5$ or 8

⇒ $\overline{PR} = \sqrt{5^2+8^2-2\cdot5\cdot8\cdot\cos 60°} = \underline{7}$ #

F. $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1 \Rightarrow$ 中心(0,0)，焦點(0,2)，(0,-2) ⇒ 上下型



∵ $\triangle PF_1F_2$ 為正△ ⇒ P必為短軸頂點

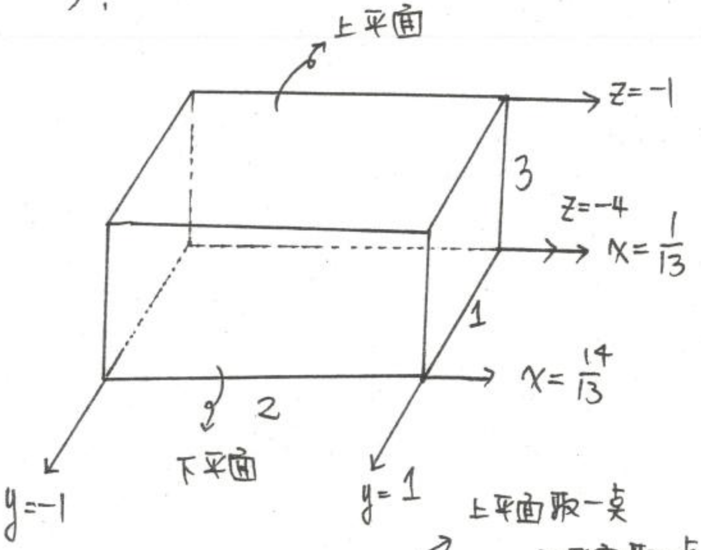
∴ $\overline{PF_1}=4$，$\overline{PF_2}=4$ ⇒ $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a=8$

∴ $a=4$，$c=2$ ⇒ $b=2\sqrt{3}$ $(a^2=b^2+c^2)$

∴ $m=b^2=12$，$n=a^2=16$

$\underline{12；16}$ #

G.



由右圖長方体可知，
若任兩點距離大於3
⇒ 一點在上方平面，另一點在下方平面
且此兩點不在同一邊上.

上平面取一點
下平面取一點

$$P=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{C^4_1\cdot C^3_1}{C^8_2}$$

$$=\frac{12}{28}=\underline{\frac{3}{7}} \#$$