1、［法一］

∵ $f(x)$ 在 $x=2$ 有最小值，且 $f(x)$ 是二次函數

⇒ $f(x)$ 是拋物線，開口朝上，頂點 $(2,1)$

⇒ $f(x)=a(x-2)^2+1 \quad (a>0)$

$f(3)=a\cdot 1^2+1=3 \Rightarrow a=2$， ⇒ $f(x)=2(x-2)^2+1$

∴ $f(1)=2\cdot 1+1=3$

［法二］對稱

$x=2$ 有最小值 ⇒ $x=2$ 是對稱軸，$f(1)=f(3)=3$

(3) #

2、

$\sin 73^\circ$

$\sin 146^\circ = +\sin 34^\circ$

$\sin 219^\circ = -\sin 39^\circ$

$\sin 292^\circ = -\sin 68^\circ$

$\sin 365^\circ = \sin 5^\circ$（同界）

總共 3 正數 2 負數

⇒ 中位數是最小正數

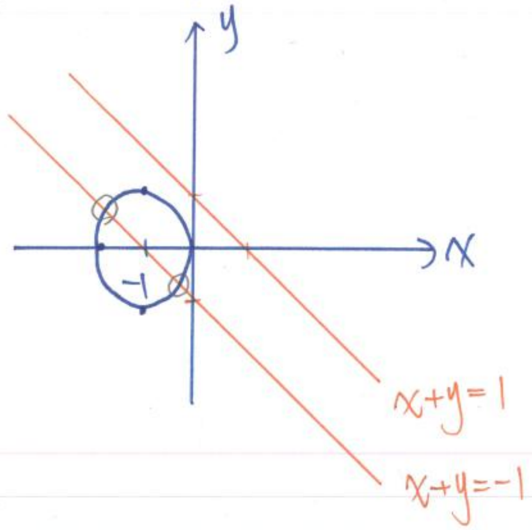
又 $0 \le \theta \le 90^\circ$ 時 $\sin\theta$ ↗ 遞增，

∴ $\sin 5^\circ$ 最小

(5) #

3、$\Gamma_1: (x+1)^2+y^2=1 \Rightarrow$ 圓心 $(-1,0)$，半徑 $=1$

$\Gamma_2: (x+y)^2=1 \Rightarrow x+y=1$ or $x+y=-1$（兩直線）



2個交點

(2) #

4. 設物質A一開始的質量 N，120小時後經過 $\frac{120}{7.5}=16$ 次半衰期.

$\Rightarrow$ 物質B一開始的質量 $\frac{N}{2}$，120小時後經過 x 次半衰期

$\Rightarrow$ 120小時後，A的質量為 $N\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{16}$

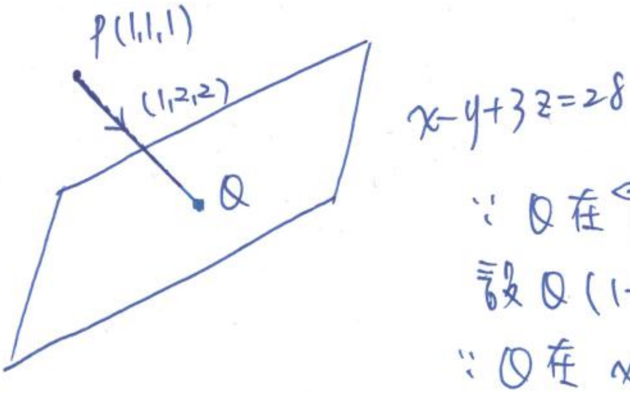
B的質量為 $\frac{N}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

$\Rightarrow N\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{16}=\frac{N}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{16}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \Rightarrow x=15.$

$\therefore$ 120小時經過15次半衰期 $\Rightarrow$ 每次半衰期為 $\frac{120}{15}=8$ 小時

(1) #

5.



設P沿(1,2,2)方向前進到 $x-y+3z=28$ 上的點Q

$\because$ Q在 $\overleftrightarrow{PQ}$ 上，利用 $\overleftrightarrow{PQ}$ 的參數式設Q.

設 $Q(1+t,1+2t,1+2t)$

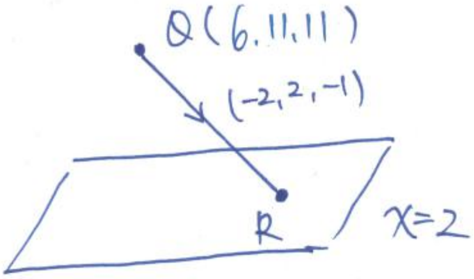
$\because$ Q在 $x-y+3z=28$ 上

$\therefore (1+t)-(1+2t)+3(1+2t)=28$

$\Rightarrow 5t=25 \Rightarrow t=5$

$\therefore Q(6,11,11)$ 且每秒前進 $(1,2,2)$

亦即 $\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$ 單位.



同上，設Q沿(-2,2,-1)方向到 $x=2$ 上的點R

設 $R(6-2s,11+2s,11-s)$

$\because$ R在 $x=2$ 上 $\Rightarrow 6-2s=2$，$s=2$

$\Rightarrow \overline{QR}=\left|2(-2,2,-1)\right|=6$

$\therefore$ 2秒後碰到.

(2) #

6. 奇數項 $= a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 120$

$+)$ 偶數項 $= a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$

總和 $= \sum_{k=1}^{10} a_k = a_1 + \cdots + a_{10} = 80$

$\therefore$ 偶數項和 $= -40$

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = a_1 + a_1 r^2 + a_1 r^4 + a_1 r^6 + a_1 r^8 \cdots (1)$

$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = a_1 r + a_1 r^3 + a_1 r^5 + a_1 r^7 + a_1 r^9 = r(a_1 + a_1 r^2 + a_1 r^4 + a_1 r^6 + a_1 r^8) \cdots (2)$

$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow r = \frac{-40}{120} = \frac{-1}{3}$

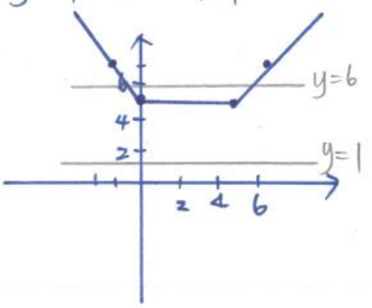
代入(1) $\Rightarrow \frac{a_1(1-(r^2)^5)}{1-r^2} = 120 \Rightarrow \because r^{10} \approx 0$

$\therefore a_1 \doteqdot 120(1-\frac{1}{9}) = 106.\cdots$ (4)#

7. 實數解 $\Rightarrow$ 畫圖解交

(1)(2) 作 $y = |x| + |x-5|$ 是折線圖

x	-1	0	5	6
y	7	5	5	7



(1) $\begin{cases} y = |x| + |x-5| \\ y = 1 \end{cases}$

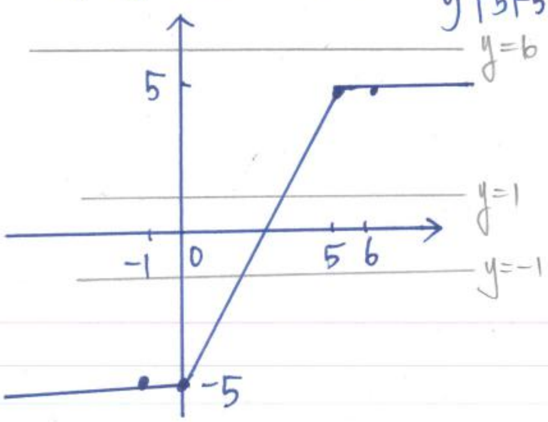
無交 $\Rightarrow$ 0個實數解

(2) $\begin{cases} y = |x| + |x-5| \\ y = 6 \end{cases}$

2個交 $\Rightarrow$ 2個實數解

(3)(4)(5) 作 $y = |x| - |x-5|$

x	-1	0	5	6
y	-5	-5	5	5



(3) $\begin{cases} y = |x| - |x-5| \\ y = 1 \end{cases}$

1個交 $\Rightarrow$ 1個實數解

(4) $\begin{cases} y = |x| - |x-5| \\ y = 6 \end{cases}$

無交 $\Rightarrow$ 0個實數解

(5) $\begin{cases} y = |x| - |x-5| \\ y = -1 \end{cases}$

1個交 $\Rightarrow$ 1個實數解 (2)(3)(5)#

8、

(1) 甲場：買一袋3顆 = 130元 (○)

蘋果 買三袋1顆 = 45×3 = 135元

(2) 乙場：一袋1顆 ⇒ 每顆 18元

奇異果 一袋3顆 ⇒ 每顆 $\frac{50}{3}$ = 16.$\dot{6}$ 元

一袋4顆 ⇒ 每顆 $\frac{65}{4}$ = 16.25元 (○)

一袋6顆 ⇒ 每顆 $\frac{95}{6}$ < 16元

(3) 甲場奇異果最便宜為 80元/一袋5顆.

⇒ 6×80 = 480元 可買 30顆 ⇒ 最多可買 31顆 (×)

20元 可再買 1顆 (一袋1顆)

(4) 甲場：先找單價低的

奇異果 = (一袋5顆)×2 + (一袋2顆) = 195元

蘋果 = (一袋3顆)×1 + (一袋1顆) = 175元

共370元

乙場：奇異果 = (一袋6顆)×2 = 190元

蘋果 = (一袋4顆)×1 = 190元

共380元 (○)

(5) 甲場：單價最便宜為 340元/8顆 = 每顆 42.5元

乙場：單價最便宜為 420元/10顆 = 每顆 42元.

∴ 買 10顆最便宜必為乙場 (×)

(1)(2)(4)#

9. z軸 ⇒ 參數式 $(0,0,t)$ ；歪斜線 ⇒ ①不平行 ②不相交 105學測

(1) L_1 : $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ 參數式 $(0,s,0)$

① $(0,0,1) \not\parallel (0,1,0)$ ② z軸與 L_1 有交點 $(0,0,0)$ (X)

(2) L_2 : $\begin{cases} y=0 \\ x+z=1 \end{cases}$ 參數式 $(s,0,1-s)$

① $(0,0,1) \not\parallel (1,0,-1)$ ② 若有交點 $\begin{cases} 0=s & \text{(x坐標)} \\ t=1-s & \text{(z坐標)} \end{cases}$

$\therefore s=0,\ t=1$. 交點 $(0,0,1)$ (X)

(3) L_3 : $\begin{cases} z=0 \\ x+y=1 \end{cases}$ 參數式 $(s,1-s,0)$

① $(0,0,1) \not\parallel (1,-1,0)$ ② 若有交點 $\begin{cases} 0=s \\ 0=1-s \\ t=0 \end{cases}$ → 無解 ⇒ 沒有交點 (O)

(4) L_4 : $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 參數式 $(1,1,s)$

① $(0,0,1) \parallel (0,0,1)$ (X)

(5) L_5 : $\begin{cases} y=1 \\ z=1 \end{cases}$ 參數式 $(s,1,1)$

① $(0,0,1) \not\parallel (1,0,0)$ ② 若有交點 $\begin{cases} 0=s \\ 0=1 \\ t=1 \end{cases}$ → 無解 ⇒ 沒有交點 (O)

(3)(5) #

10. $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+2$, a, b, c 是正整數

(1) 若 $\alpha>0 \Rightarrow f(\alpha)=\alpha^4+a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+2>0$ $\therefore f(\alpha)\neq 0$

$\therefore f(x)=0$ 必無正根

(2) 4次方程式 ⇒ ① 4實根
(3) ② 2實根 2虛根
③ 4虛根

(4) $f(1)+f(-1)=(1+a+b+c+2)+(1-a+b-c+2)=6+2b$ (○)

(5) $f(x)=0$ 有一根介於 -1 和 0 之間 $\Rightarrow f(-1)=1-a+b-c+2$

(想到勘根 $f(-1)\cdot f(0)<0$) $f(0)=2$

$f(-1)\cdot f(0)<0 \Rightarrow (3-a+b-c)\cdot 2<0 \Rightarrow a+c>3+b$

$\Rightarrow f(x)$ 在 -1 和 0 之間有實根 (○)

(1)(4)(5) ⁂

11.

(1) 原始 9 分 $\Longrightarrow 40\log_{10}(\frac{10}{10})+60=0+60=60$ (○)

(2) ∵ $\log_{10}\frac{x+1}{60}$ 是遞增函數

∴原始 $x>20$ 分 $\Rightarrow$ 新分數 $=40\log\frac{x+1}{10}+60>40\log\frac{21}{10}+60$

$>40\log 2+60\approx 40\times 0.3010+60=72.\cdots$ (○)

(3) 若全班成績皆相同，全距=0分。

調整後仍全班成績皆相同，全距=0分 (×)

(4) 同(2) $\log_{10}\frac{x+1}{60}$ 是遞增 $\Rightarrow$ 全班排名不變

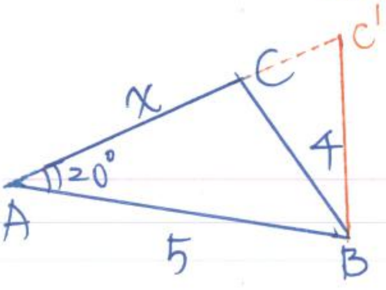
小文為中位數，即小文為第21名 $\Rightarrow$ 調整後仍為中位數 (○)

(5) 平均僅隨著"+"、"−"、"×"、"÷"改變 (跟著"+"、"−"、"×"、"÷")

"√"、"log"等沒有規則 (×)

(1)(2)(4) ⁂

12.



SSA: 先判斷有幾組解

$\cos 20^\circ=\frac{x^2+25-16}{2\cdot x\cdot 5}\Rightarrow x^2-(10\cos 20^\circ)\cdot x+9=0$

$D=(10\cos 20^\circ)^2-4\cdot 9>(10\cdot\cos 30^\circ)^2-36>0$

∴此三角形有 2 組解，且 $\angle ACB+\angle AC'B=180^\circ$

12. (1) $\angle B$ 有 2 解 $\Rightarrow \angle ABC$ or $\angle ABC'$

$\therefore$ $0^\circ \sim 180^\circ$ 餘弦值 ($\cos B$) 均相異 (x)

(2) $\angle C$ 和 $\angle C' = 180^\circ - \angle C$ 有相同的正弦值 ($\sin C$)

或由正弦定理知: $\frac{4}{\sin 20^\circ} = \frac{5}{\sin C} \Rightarrow \sin C$ 為定值 (o)

(3) $\triangle ABC$ 面積 $= \frac{1}{2} \times 5 \times \overline{AC} \times \sin 20^\circ$
$= \frac{1}{2} \times 5 \times \overline{AC'} \times \sin 20^\circ$] 相異 (x)

(4) 由圖知 $\triangle ACB$ 內切圓半徑 $<$ $\triangle AC'B$ 內切圓半徑 (x)

(5) 正弦 $\frac{4}{\sin 20^\circ} = 2R$ 是定值. (o)

(2)(5) #

13. 依照順序 A 先抽, 抽到甲、乙、丙、丁機會均等.

$$\therefore P_{A,甲} = P_{A,乙} = P_{A,丙} = P_{A,丁} = \frac{1}{4}$$

接著由 B 抽, B 不抽甲, 但抽到乙、丙、丁機會均等.

$$\therefore P_{B,甲} = 0,\ P_{B,乙} = P_{B,丙} = P_{B,丁} = \frac{1}{3}$$

最後由 C、D 抽, 對 C、D 而言, 先後順序不影響機率.

$\therefore P_{C,甲} = P_{D,甲}$ 又 $P_{A,甲} + P_{B,甲} = \frac{1}{4} \Rightarrow P_{C,甲} = P_{D,甲} = \frac{3}{8}$

$P_{C,乙} = P_{D,乙}$ 　 $P_{A,乙} + P_{B,乙} = \frac{7}{12} \Rightarrow P_{C,乙} = P_{D,乙} = \frac{5}{24}$

$P_{C,丙} = P_{D,丙}$ 　 $P_{A,丙} + P_{B,丙} = \frac{7}{12} \Rightarrow P_{C,丙} = P_{D,丙} = \frac{5}{24}$

$P_{C,丁} = P_{D,丁}$ 　 $P_{A,丁} + P_{B,丁} = \frac{7}{12} \Rightarrow P_{C,丁} = P_{D,丁} = \frac{5}{24}$

(對$\overbrace{\text{甲、乙、丙、丁}}^{\text{合計}}$而言, 被 A、B、C、D 抽到機率和 = 1)

(1) $P_{A,甲} = \frac{1}{4} < P_{C,甲} = \frac{3}{8}$

(2) $P_{C,甲} = \frac{3}{8} = P_{D,甲}$

(3) $P_{A,乙} = \frac{1}{4} < P_{B,乙} = \frac{1}{3}$

(4) $P_{B,丙} = \frac{1}{3} > P_{C,丙} = \frac{5}{24}$

(5) $P_{C,甲} = \frac{3}{8} > P_{C,乙} = \frac{5}{24}$

(4)(5) #

A.

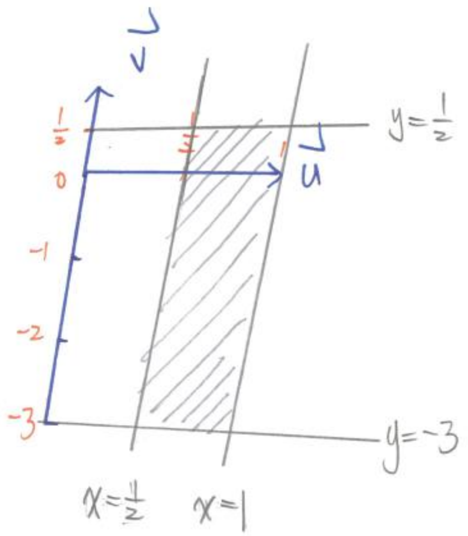
$$\begin{array}{l} \text{第1列} \\ \text{第2列} \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$n(A)=$ 第一列方法 × 第二列方法 − (第一列 = 第二列) 方法

$=(2\times2\times2-1)\times(2\times2\times2-1)-(2\times2\times2-1)\times1$

$=7\times7-7\times1=\underline{42}$ #

B.

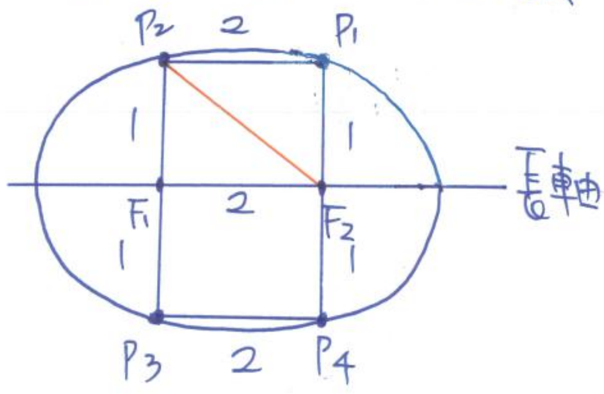


Ω 為 $(\frac{1}{2}\times\frac{7}{2})$ 個 $\vec{u}$、$\vec{v}$ 所展成之▱面積

$=\frac{7}{4}\cdot\left|\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}\right|$

$=\frac{7}{4}\times2=\underline{\frac{7}{2}}$ #

C. ① 長軸長 ⇒ 橢圓定義: $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$



由畢氏定理知 $\overline{P_2F_2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

$\therefore 2a=\overline{P_2F_1}+\overline{P_2F_2}=\underline{1+\sqrt{5}}$ #

D.

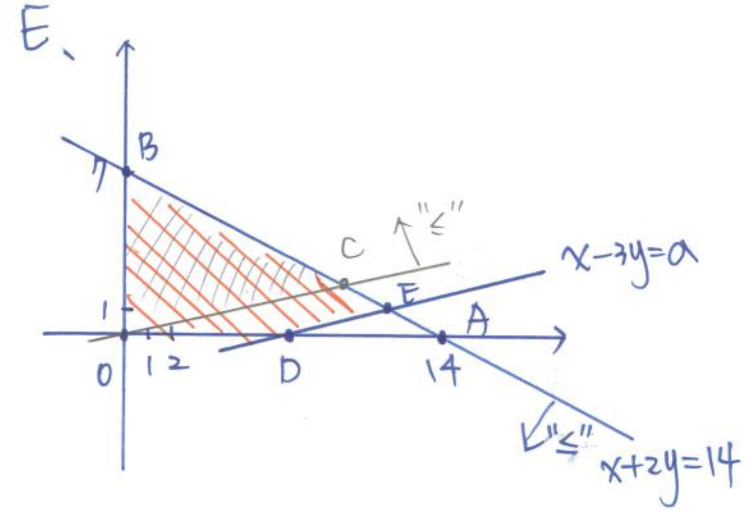
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{\times(-2),\ \times(-1),\ \times(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & -4 & -4 & 8 \end{array}\right] \times(-\tfrac{1}{3}) \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & -4 & -4 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \times(-2) \\ \times3 \\ \times4 \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\therefore a=1,\ b=4$

$c=1,\ \underline{d=-2}$ #

E、



先作 $x-3y=0$

C $\begin{cases} x-3y=0 \\ x+2y=14 \end{cases} \Rightarrow 5y=14,\ y=\frac{14}{5}$

$\therefore x=\frac{42}{5}$

$\triangle OCB = \frac{1}{2}\times 7\times\frac{42}{5}=\frac{147}{5}<\frac{213}{5}$

$\therefore$ $x-3y=a$ 在 $x-3y=0$ 的右側 $(a>0)$

$\therefore$ 聯立不等式所圍成區域為四邊形 OBED

$=\triangle OAB-\triangle ADE=\frac{1}{2}\times 14\times 7-\frac{1}{2}\times(14-a)\times\frac{14-a}{5}=\frac{213}{5}$

$\left(\text{D} \begin{cases} x-3y=a \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow D(a,0) \qquad \text{E} \begin{cases} x-3y=a \\ x+2y=14 \end{cases} \Rightarrow 5y=14-a,\ y=\frac{14-a}{5},\ x=\frac{42+2a}{5} \Rightarrow E\left(\frac{14-a}{5},\frac{42+2a}{5}\right) \right)$

$\Rightarrow 14\times 7-\frac{(14-a)^2}{5}=\frac{426}{5} \Rightarrow \frac{(14-a)^2}{5}=\frac{490-426}{5} \Rightarrow (14-a)^2=64$

$\Rightarrow a=6$ or 22，顯然 $\underline{a=6}$. #

F. $n(S)=\underset{\substack{\uparrow\\ a}}{6}\times\underset{\substack{\uparrow\\ b}}{3}\times\underset{\substack{\uparrow\\ c}}{6}=108$

$\therefore p=\frac{57}{108}=\underline{\frac{19}{36}}$ #

$n(A)$: $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}>0 \Rightarrow ac-b^2>0$

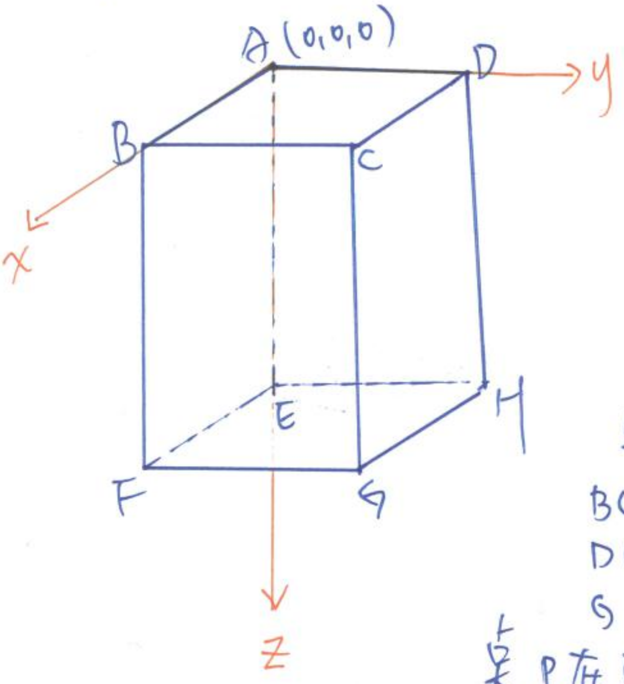
又 b 是奇數 ⇒ ① $b=1$，a, c 不全為 1 即可 ⇒ 共 $6^2-1=35$ 種

② $b=3$，
2×5、2×6
3×4、3×5、3×6
4×3、4×4、4×5、4×6
5×2、5×3、5×4、5×5、5×6
6×2、6×3、6×4、6×5、6×6
⇒ 共 19 種

③ $b=5$.
5×6、
6×5、6×6
⇒ 共 3 種

$n(A)=57$

9. 坐標化



設 $A(0,0,0) \Rightarrow C(1,1,0)$

$B(1,0,0)$ $F(1,0,1)$

$D(0,1,0)$ $G(1,1,1)$

$E(0,0,1)$ $H(0,1,1)$

$\overrightarrow{AP}=(\frac{1}{3},2,a)$，即 $P(\frac{1}{3},2,a)$

平面BGD方程式：$x+by+cz=d$

$B(1,0,0) \Rightarrow d=1$

$D(0,1,0) \Rightarrow b=d=1$ $\Rightarrow x+y-z=1$

$G(1,1,1) \Rightarrow 1+1+c=1 \Rightarrow c=-1$

點P在平面上 $\Rightarrow \frac{1}{3}+2-a=1 \Rightarrow a=\underline{\frac{4}{3}}$ #