106 學測

1、

師 r_1 玩「寶可夢」 V / X

學生 r_2 玩「寶可夢」 V / X

欲求全校玩「寶可夢」的比例，即需知道 師、生比例

若師比例為 x，生比例即為 $(1-x)$ ⇒ 玩「寶可夢」比例為 $x r_1 + (1-x) r_2$

(1) #

2.

$$b \xrightarrow{\text{莫擊一次}} b^2 \xrightarrow{\text{莫擊}} (b^2)^2 = b^4 \xrightarrow{\text{莫擊}} (b^4)^2 = b^8$$

$\therefore b^8 = 81^3 \Rightarrow b^8 = 9^6 \Rightarrow b < 9$

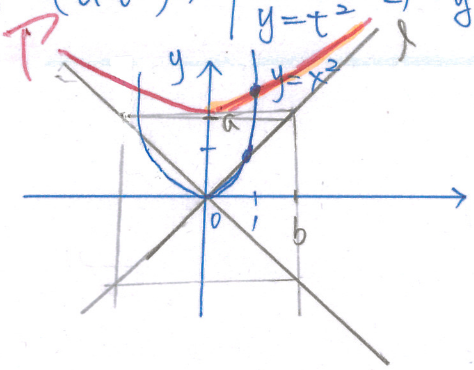
$= 3^{12} \Rightarrow b > 3$

(3) #

（或取 $\log \Rightarrow \log b^8 = \log 81^3 \Rightarrow 8\log b = 12\log 3 \doteq 12 \times 0.4771$

$\Rightarrow \log b \doteq 0.71565 \Rightarrow b \doteq 5$ ）

3、$(t, t^2) \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \Rightarrow y = x^2$

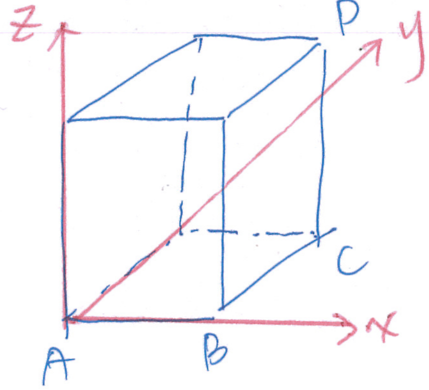


$\frac{-x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow$ ① 中心 $(0,0)$ ② 上下型雙曲線

由圖知，(t, t^2) 會先碰到 l，再碰到 Γ

(5) #

4. 坐標化



設 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$

⇒ $C(1,1,0)$，$D(1,1,1)$

∵ A→B，C→D 恰 1 秒，

∴ t 秒時，A→B 的動點，$P(t,0,0)$

$(0<t<1)$ C→D 的動點，$Q(1,1,t)$

$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{(t-1)^2 + (0-1)^2 + (0-t)^2}$

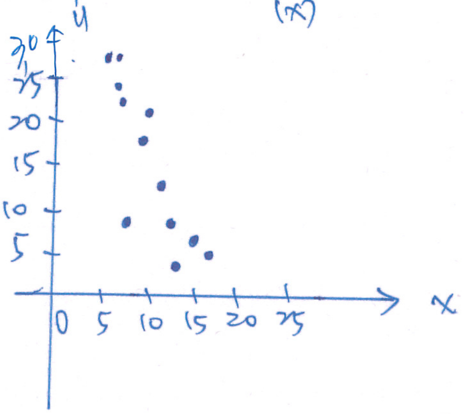
$= \sqrt{2t^2 - 2t + 2}$

$= \sqrt{2(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{2}}$

(4) #

$\therefore t = \frac{1}{2}$ 時，$\overline{PQ}$ 最小

5、重新描繪溫差(x)與最高溫(y)的散布圖



由圖知最高溫與溫差回歸線斜率為負，
亦即負相關，
而原圖(最高溫與最低溫)之散布圖
較像直線，亦即原圖相關程度較高 (4)#

6、$\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x \in$ Ⅲ，$\cos x \le 0$

$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\circ} \le x^{\circ} \le \left(\frac{3\pi}{2}\right)^{\circ} \Rightarrow (1.57)^{\circ} \le x^{\circ} \le (4.71)^{\circ} \Rightarrow x^{\circ} \in$ Ⅰ $\Rightarrow \cos x^{\circ} > 0$

∴ $\cos x^{\circ} \le \cos x$ 不可能成立. (1)#

7. 四種餐點，5天中，每種至少各一次

∴其中一種2次，其餘每種1次

① 若牛肉麵2次，其餘各1次 ⇒ 有3種麵且不連續2天吃麵

麵必排一、三、五 ⇒ $\frac{3!}{2!}$ (牛、牛、滷排列)

飯必排二、四 ⇒ $2!$ (咖、排 排列)

⇒ $\frac{3!}{2!} \times 2! = 6$

② 若大滷麵2次，其餘各1次 ⇒ 同①，6種方法.

③ 若咖哩飯2次，其餘各1次 ⇒ 2種麵不相鄰 ⇒ 先排飯

← 牛滷排列

✓咖✓咖✓排✓ ⇒ $C^3_1 \times 2!$

✓咖✓排✓咖✓ ⇒ $C^4_2 \times 2!$

✓排✓咖✓咖✓ ⇒ $C^3_1 \times 2!$

24種

④ 若排骨飯2次，其餘各1次 ⇒ 同③，24種方法

由①、②、③、④知 $6+6+24+24=60$ (2)#

106 學測

8. $\begin{cases} y=f(x)=ax^m \\ y=g(x)=bx^n \end{cases}$ 有3個交點 $\Rightarrow ax^m=bx^n$ 有3個實數解

① 設 $m\geq n \Rightarrow x=0$ or $x^{m-n}=\frac{b}{a} \Rightarrow x^{m-n}=\frac{b}{a}$ 有2個實數解

$\Rightarrow m-n$ 是偶數 且 $\frac{b}{a}>0$

② 同理 $m\leq n \Rightarrow x=0$ or $x^{n-m}=\frac{a}{b} \Rightarrow n-m$ 是偶數 且 $\frac{a}{b}>0$

由 ①、② 知 m,n 同奇 or 同偶 且 a,b 同號.

(1)(3) #

9. 設 此圓圓心 $C(x,y)$，半徑 r

$A(0,0)$ 在圓外 $\Rightarrow \overline{CA}>r$

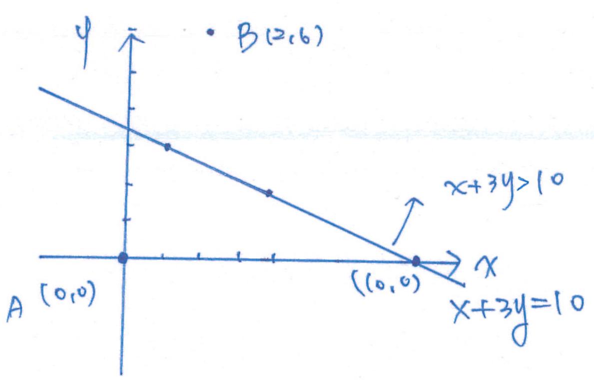
$B(2,6)$ 在圓內 $\Rightarrow \overline{CB}<r$

$\Rightarrow \overline{CA}>\overline{CB}$

$\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}>\sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2} \Rightarrow x^2+y^2>x^2-4x+4+y^2-12y+36$

$\Rightarrow 4x+12y>40 \Rightarrow x+3y>10$

$\Rightarrow$ 圓心 可能在 $x+3y=10$ 的右側



(1) 圓心所在的可行解區域有涵蓋第一象限 (×) Ex: $(-1,10)$

(2) 圓心所在的可行解區域沒有涵蓋第三象限 (×)

(3) 圓心所在的可行解區域有涵蓋第一象限，但半徑沒有限制 (×). Ex: $(100,100)$

(4) 若圓心在 x 軸上，圓心必在 $(10,0)$ 的右側，此時 $r=\sqrt{(x-2)^2+(-6)^2}$

$\therefore r>\sqrt{8^2+6^2}=10$ (×)

(5) 同(4)，若在第四象限，$r=\sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2}>\sqrt{(10-2)^2+(0-6)^2}=10$ (○)

(5) #

10. L_1：點$(1,-1,0)$，$\vec{L_1}=(2,2,1)$

L_2：$z=0\begin{cases}x-2y=-4\\x+y=5\end{cases}\Rightarrow y=3,\ x=2$，點$(2,3,0)$

$$\begin{array}{cccccc}\cancel{1} & -2 & 2 & 1 & -2 & \cancel{2}\\ \cancel{1} & 1 & -4 & 1 & 1 & \cancel{-4}\\ \hline & 6 & 6 & 3 & & \end{array}$$

$\vec{L_2}=(2,2,1)$

L_3：點$(0,-2,4)$，$\vec{L_3}=(-1,-1,4)$

(1) 若 $\vec{L_1}\perp\vec{L_2}\Leftrightarrow\vec{L_1}\cdot\vec{L_2}=0\Rightarrow 4+4+2\neq0$ (×)

(2) 若 $\vec{L_1}\perp\vec{L_3}\Leftrightarrow\vec{L_1}\cdot\vec{L_3}=0\Rightarrow(-2)+(-2)+4=0$ (○)

(3) 二線關係：$\underbrace{\text{平行、重合、交於一點}}_{\text{可有一平面包含二線}}$、$\underbrace{\text{歪斜}}_{\text{無法找到一平面包含二線}}$

(3) $\vec{L_1}\parallel\vec{L_2}\Rightarrow$ 必為平行或重合 $\Rightarrow$ 可有一平面包含二線 (○)

(4) 判斷 L_1、L_3 關係 $\Rightarrow\vec{L_1}\nparallel\vec{L_3}\Rightarrow$ 必為交於一點或歪斜 $\Rightarrow$ 判斷是否有交點

設有交點 P 在 L_1 上，設 $P(1+2t,-1+2t,t)$

P 在 L_3 上，設 $P(-s,-2-s,4+4s)$

$$\begin{cases}1+2t=-s\cdots①\\-1+2t=-2-s\cdots②\\t=4+4s\cdots③\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}①、②：2t+s=-1\\③：t-4s=4\end{cases}\Rightarrow t=0,\ s=-1$$

$\Rightarrow$ 有交點$(1,-1,0)$ (○)

(5) 判斷 L_2、L_3 關係 $\Rightarrow\vec{L_2}\nparallel\vec{L_3}\Rightarrow$ 必為交於一點或歪斜 $\Rightarrow$ 判斷是否有交點

設有交點 Q 在 L_2 上，設 $Q(2+2t,3+2t,t)$

Q 在 L_3 上，設 $Q(-s,-2-s,4+4s)$

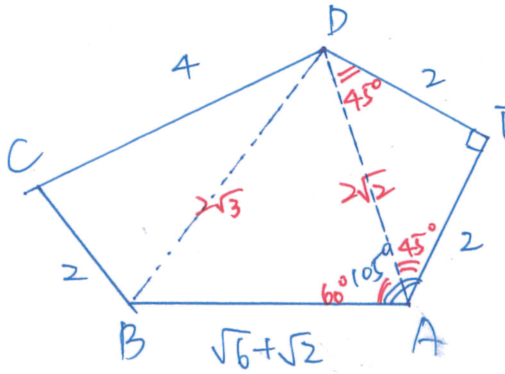
$$\begin{cases}2+2t=-s\\3+2t=-2-s\\t=4+4s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2t+s=-2\cdots①\\2t+s=-5\cdots②\\t-4s=4\end{cases}$$

由①、②知此方程組無解。

∴ 沒有交點 (×)

(2)(3)(4)

11、 (1)(2)(3)



連接 $\overline{DA}$、$\overline{DB}$

∵ △ADE為等腰直角三角形

⇒ $\angle ADE=\angle DAE=45°$ 且 $\overline{AD}=2\sqrt2$

∴ $\angle DAB=60°$

考慮△ABD ⇒ $\overline{BD}=\sqrt{(\sqrt6+\sqrt2)^2+(2\sqrt2)^2-2(\sqrt6+\sqrt2)(2\sqrt2)\cos60°}$

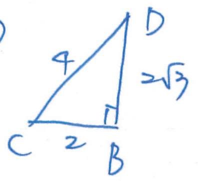
$=\sqrt{8+4\sqrt3+8-(4\sqrt3+4)}=\sqrt{12}$

(4) 由正弦定理知 $\dfrac{\overline{BD}}{\sin A}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin D}=\dfrac{\overline{AD}}{\sin B}\Rightarrow\dfrac{2\sqrt3}{\frac{\sqrt3}{2}}=\dfrac{\sqrt6+\sqrt2}{\sin D}=\dfrac{2\sqrt2}{\sin B}=4$

∴ $\sin D=\dfrac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$，$\sin B=\dfrac{\sqrt2}{2}$ ⇒ $\angle D=75°$ or $105°$，$\angle B=45°$ or $135°$

又∵ $\angle A=60°$ ∴ $\angle D=75°$，$\angle B=45°=\angle ABD$

(5) 觀察△BCD ⇒

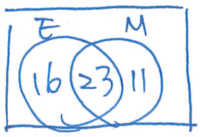


∴ △BCD面積 $=\frac12\times2\times2\sqrt3=\sqrt3$

(1)(4)

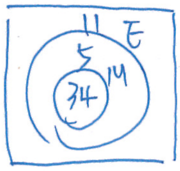
12. (1) $x+y$ 表示數學及格的人數 = 34人 (×)

(2) 只看英文和數學 →分開

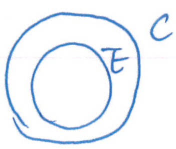


由圖知：$0\le y\le 11$ (○)

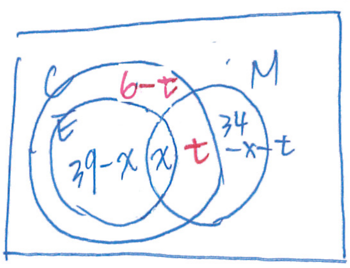
重疊



(3)(4)(5) 英文及格的學生 ⇒ 國文及格的學生



設有 t 人國文、數學及格，但英文不及格



(3) 至少一科不及格 = 全 − 三科皆及格 $=50-x$ (×)

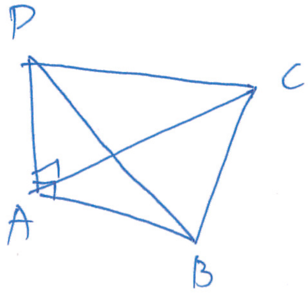
(4) $45\le(39-x)+x+t+(6-t)+(34-x-t)\le50\Rightarrow29\le x+t\le34$

(5) 又 $0\le t\le6$ ∴ $23\le x\le34$

∴ $16\le50-x\le27$，最少16人，最多27人

(2)(5)

17.



(1) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC})$

$=\overrightarrow{DA}^2+\underline{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AC}}+\underline{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

∵垂直 ∴內積為0

$=\overrightarrow{DA}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ (×)

(2) 由(1)知. $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}^2>0$ ∴∠BDC是銳角 (×)

(若∠BAC是直角 ⇒ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$)

(3) ∵∠BAC是銳角 ∴ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$，由(1)知 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}>0$ ⇒ ∠BDC是銳角 (○)

(4) ∵∠BAC是鈍角 ∴ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<0$，由(1)知 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}$ 可能 >0, $=0$, <0 ⇒ ∠BDC可能是銳、鈍、直角 (×)

(5) 若 $\overline{AB}<\overline{DA}$ 且 $\overline{AC}<\overline{DA}$，由(1)知

$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=|\overrightarrow{DA}|^2+|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta>0$ ∴ ∠BDC是銳角. (○)

(∵ $|\cos\theta|\le 1$)

(3)(5)#

A. [法一] 找規律

$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=5,\ a_4=12$ $a_5=25$

1　3　7　13

2　4　6

25#

[法二] 設 $f(x)=ax^2+bx+c$

$a_n=a_{n-1}+f(n-2)$ ⇒ $n=2$時，$2=1+c$ ⇒ $c=1$

$n=3$時，$5=2+a+b+c$ ⇒ $a+b=2$

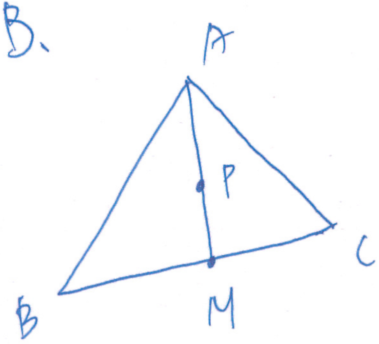
$n=4$時，$12=5+4a+2b+c$ ⇒ $4a+2b=6$，$2a+b=3$

∴ $a=b=1$ ⇒ $f(x)=x^2+x+1$

$n=5$時，$a_5=12+9+3+1=25$

25#

B.



$\because \overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} \Rightarrow t\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

$\because$ M, B, C 三點共線 $\therefore \frac{1}{2t} + \frac{1}{5t} = 1 \Rightarrow \frac{7}{10t} = 1$

$t = \frac{7}{10}$

$\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{7}{10}\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{10}{7}\overrightarrow{AP} = \frac{10}{7}\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{6}\right)$

$= \left(\frac{40}{21}, \frac{25}{21}\right)$ #

C. 有理根 ⇒ 整係數一次因式檢驗法.

$\therefore$ 可能的有理根為 $\pm 1, \pm\frac{1}{5}$.

$x=1$ 代入 ⇒ $5+(a+4)+a+1=0 \Rightarrow 2a=-10,\ a=-5$ (不合, $a\in N$)

$x=-1$ 代入 ⇒ $-5+(a+4)-a+1=0 \Rightarrow 0=0$, 任意 a 值.

$x=\frac{1}{5}$ 代入 ⇒ $\frac{1}{25}+\frac{1}{25}(a+4)+\frac{1}{5}a+1=0 \Rightarrow \frac{6}{25}a+\frac{30}{25}=0 \Rightarrow a=-5$ (不合)

$x=\frac{-1}{5}$ 代入 ⇒ $\frac{-1}{25}+\frac{1}{25}(a+4)-\frac{1}{5}a+1=0 \Rightarrow \frac{-4a}{25}+\frac{28}{25}=0 \Rightarrow a=7$

檢查 $a=7$ 時 $5x^3+11x^2+7x+1=(5x+1)(x+1)(x+1)$ $\therefore a=7$ #

D.

$$\begin{cases} a_1x - a_2y + 2a_3z = k+1 & \cdots ① \\ a_4x - a_5y + 2a_6z = -k-5 & \cdots ② \\ a_7x - a_8y + 2a_9z = k+9 & \cdots ③ \end{cases}$$

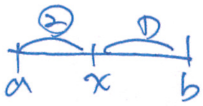
②−①: $(3d)x-(3d)y+(6d)z = -2k-6$

③−②: $(3d)x-(3d)y+(6d)z = 2k+14$

$\because$ 有解 $\therefore -2k-6 = 2k+14 \Rightarrow 4k=-20 \Rightarrow k=-5$ #

E.

$\log x = \frac{1}{3}\log a + \frac{2}{3}\log b \Rightarrow$

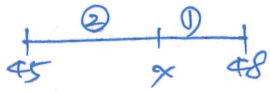


亦即 $|a-x| : |x-b| = 2:1$

$\frac{1}{3}(1+2\log 3-\log 2) = \frac{1}{3}\log 45$

$\frac{2}{3}(4\log 2+\log 3) = \frac{2}{3}\log 48$

∴



∴ $x=47$ #

F. $n(U) = 4^4 = 256$

A: 可能①上、下、左、右各1次: $4! = 24$

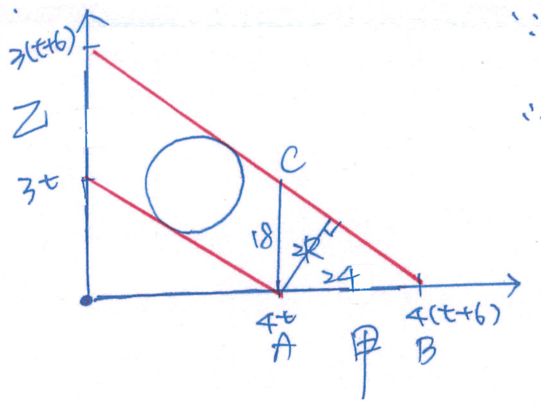
② 上×2, 下×2: $\frac{4!}{2!2!} = 6$

③ 左×2, 右×2: $\frac{4!}{2!2!} = 6$

$n(A) = 36$

$p = \frac{36}{256} = \frac{9}{64}$ #

G.



設 t 秒後開始被擋住

∵ 甲、乙等速前進且速度比 = 4:3

∴ 甲、乙所構成的直線斜率為 $-\frac{3}{4}$

考慮 △ABC, $\overline{AB}=24$, $\overline{AC}=18$ ⇒ $\overline{BC}=30$

∴ △ABC面積 $= \frac{1}{2}\times18\times24 = \frac{1}{2}\times30\times2R$

⇒ $2R = \frac{18\times24}{30} = \frac{72}{5} = 14.4$ #