1.

$A^2=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&8\\0&9\end{bmatrix}$

$A^4=A^2\cdot A^2=\begin{bmatrix}1&8\\0&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&8\\0&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&80\\0&81\end{bmatrix}$

$a+b+c+d=1+80+0+81=162$，選 (2) #

2. $a_1=\log 36=1.\cdots$

a_1: $\log 36$

a_2: $2a_1$, $\frac{a_1}{2}$ (x, "<1")

a_3: $4a_1$, a_1

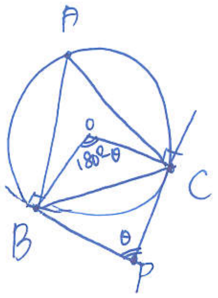
a_4: $8a_1$, $2a_1$, $2a_1$, $\frac{a_1}{2}$ (x)

a_5: $16a_1$, $4a_1$, $4a_1$, a_1, $4a_1$, a_1

可能值為 $a_1, 4a_1, 16a_1$

共 3 種，選 (1) #

3.



設圓心 O，$\because \angle OBP=\angle OCP=90^\circ$

$\therefore \angle BOC=180^\circ-\theta$

$\because \angle BAC$ 是圓周角 $\therefore \angle BAC=\frac{180^\circ-\theta}{2}=90^\circ-\frac{\theta}{2}$

$\therefore \cos A=\cos(90^\circ-\frac{\theta}{2})=\sin\frac{\theta}{2}$，選 (3) #

4.

$(2\vec{a}+\vec{b})$ 和 $(\vec{a}+2\vec{b})$ 所張三角形面積 $=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2\vec{a}+\vec{b}\\\vec{a}+2\vec{b}\end{vmatrix}\right| \times(-2)=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2\vec{a}+\vec{b}\\-3\vec{a}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{b}\\-3\vec{a}\end{vmatrix}\right|$

$=\frac{3}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{a}\\\vec{b}\end{vmatrix}\right|=6$，$\left|\begin{vmatrix}\vec{a}\\\vec{b}\end{vmatrix}\right|=4$

$(3\vec{a}+\vec{b})$ 和 $(\vec{a}+3\vec{b})$ 所張三角形面積 $=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}3\vec{a}+\vec{b}\\\vec{a}+3\vec{b}\end{vmatrix}\right| \times(-3)=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}3\vec{a}+\vec{b}\\-8\vec{a}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{b}\\-8\vec{a}\end{vmatrix}\right|$

$=4\left|\begin{vmatrix}\vec{a}\\\vec{b}\end{vmatrix}\right|=16$，選 (5) #

5.

$\underbrace{(x+1)f(x)}_{4次}=\underbrace{(x^3+2)}_{3次}\cdot\underbrace{(ax+b)}_{1次}+(x+2)$

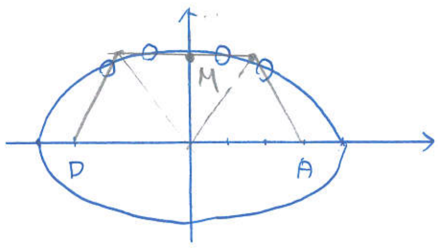
$x=0$ 代入，$1\cdot f(0)=2\cdot b+2$，$4=2b+2$，$b=1$

$x=-1$ 代入，$0\cdot f(-1)=1\cdot(-a+b)+1$，$a-b=1$，$a=2$

$x=2$ 代入，$3\cdot f(2)=10\cdot(2\times2+1)+4$，$3f(2)=54$，$f(2)=18$，選 (4) #

6、 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ ① 左右 ② 中心(0,0) ③ $a=4,\ b=\sqrt{7},\ c=\sqrt{16-7}=3$

∴ A、D為橢圓之焦點，∵ $\overline{AD}=6$，∴正六邊形邊長為3



正六邊形上一點B，$\overline{BA}=3$，$\overline{BD}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times3\times2=3\sqrt{3}$

∴ $\overline{BA}+\overline{BD}=3+3\sqrt{3}=3+\sqrt{27}\approx 8.\cdots>8=2a$

B、C之中點 $M(0,\frac{3}{2}\sqrt{3})$，$\frac{3}{2}\sqrt{3}=\sqrt{\frac{27}{4}}<\sqrt{7}$

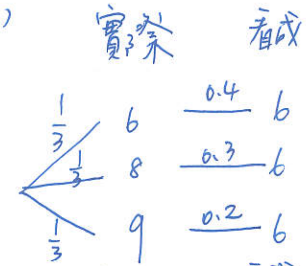
故由圖知，x軸上方、下方各有4個交點，選(5)

7. (1) 數字8看成8的機率為0.4 (×)

(2) 數字6看成不是6的機率為 $1-0.4=0.6$ (○)

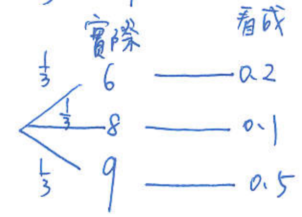
(3) 數字6被誤認的機率為 0.6
數字8被誤認的機率為 0.6
數字9被誤認的機率為 0.5 (○)

(4)



$P(\text{實際}6 \mid \text{看成}6)=\dfrac{\frac13\times0.4}{\frac13\times0.4+\frac13\times0.3+\frac13\times0.2}=\dfrac{4}{9}$ (○)

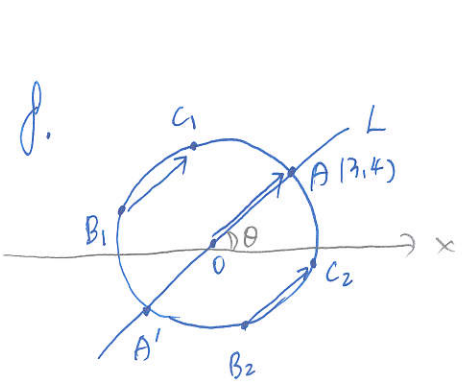
(5)



$P(\text{實際}9 \mid \text{看成}9)=\dfrac{\frac13\times0.5}{\frac13\times0.2+\frac13\times0.1+\frac13\times0.5}=\dfrac{5}{8}=\dfrac{15}{24}<\dfrac{16}{24}=\dfrac{2}{3}$ (×)

選(2)(3)(4)

8.



(1) 另一交點A'，為A對O之對稱點，故 $A'(-3,-4)$ (×)

(2) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}=(3,4)$，故 $m_{BC}=\frac{4}{3}$ (×)

(3) ∵ $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{BC}=\overline{OA'}=5$ (半徑)
∴ △OBC為正三角形，又 $\overline{BC}\parallel\overline{OA}$
∴ $\angle AOC=60^\circ$ (○)

(4) $\angle ACB=60^\circ+60^\circ=120^\circ$，△ABC面積 $=\frac12\times5\times5\times\sin120^\circ=\frac{25\sqrt{3}}{4}$ (○)

(5) $\sin\theta=\frac45$，$30^\circ<\theta<60^\circ$，故 B_1、C_1 均在第二象限 (○)
B_2、C_2 均在第四象限

選(3)(5)

9. 甲得票數為 $0.4x+0.55y$，乙得票數為 $0.6x+0.45y$

(1) 若 $x=1000$, $y=100$，則甲得 455 票，乙得 645 票
若 $x=100$, $y=1000$，則甲得 590 票，乙得 510 票． 無法決定當選人 (×)

(2) 甲當選：$0.4x+0.55y > 0.6x+0.45y$，$0.2x<0.1y$，$\frac{x}{y}<\frac{1}{2}$
乙當選：$\frac{x}{y}>\frac{1}{2}$

故 $\frac{x}{y}<\frac{1}{2}$ 可決定甲當選 (○)

(3) $x>y \Rightarrow \frac{x}{y}>1>\frac{1}{2}$，故乙當選 (○)

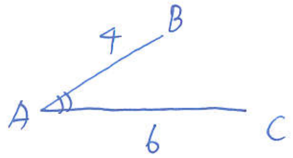
(4) $0.4x > 0.55y$，$\frac{x}{y} > \frac{0.55}{0.4} = \frac{11}{8} > \frac{1}{2}$，故乙當選 (○)

(5) $0.45y > 0.6x$，$\frac{x}{y} < \frac{0.6}{0.45} = \frac{4}{3}$，故無法確定 (×)

選 (2)(3)(4)。

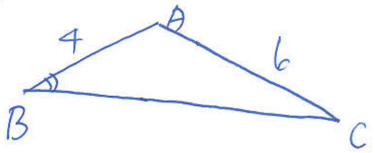
10.

(1)



$\cos A$ 可以確定 $\angle A$．
故 SAS 全等，$\triangle ABC$ 唯一 (○)

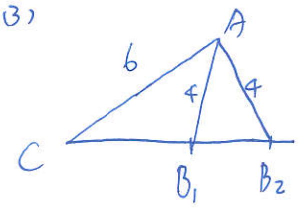
(2)



$\cos B$ 可以確定 $\angle B$
SSA，但 $\overline{AC} > \overline{AB}$，即 $\angle B > \angle C$
故 $\frac{\overline{AC}}{\sin B} = \frac{\overline{AB}}{\sin C}$，$\sin C$ 確定，且 $\angle C$ 為銳角，也確定

故 AAASS 確定，$\triangle ABC$ 唯一 (○)

(3)



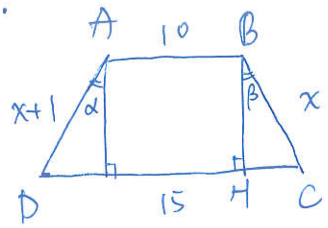
如圖，可能有 $\triangle ACB_1$ 或 $\triangle ACB_2$ (×)

(4) $\triangle ABC$ 面積 $= \frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A = \frac{1}{2}\times 4\times 6\times\sin A$，得 $\sin A$ 確定，
但無法判斷 $\angle A$ 為銳角或鈍角 (×)

(5) $\frac{\overline{AB}}{\sin C} = \frac{\overline{AC}}{\sin B} = 2R$，$R$ 確定，得 $\sin B$ $\sin C$ 確定，無法判斷 $\angle B$ 是銳角或鈍角. (×)

選 (1)(2)。

11.



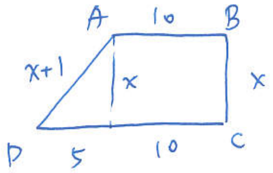
設梯形高 h，$\overline{BC}=x$，$\overline{AD}=x+1$

(1) $\cos\alpha=\frac{h}{x+1}$，$\cos\beta=\frac{h}{x}$

∴ $\cos\alpha<\cos\beta$ ∴ $\alpha>\beta$，得 $\angle A>\angle B$ (○)

(2) $\angle A+\angle D=180^\circ$，又 $\angle B<\angle A$，∴ $\angle B+\angle D<180^\circ$ (○)

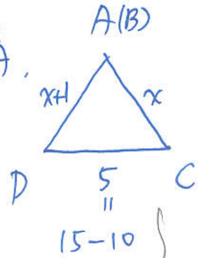
(3) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}<0$ 表示 $\angle ABC$ 為鈍角



若 $(x+1)^2=x^2+5^2$，$2x+1=25$，$x=12$ 時，

$\angle ABC=90^\circ$，即 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ (×)

(4) 將 $\overline{BC}$ 平移 $\overrightarrow{BA}$，



，$(x+1)+x>5$，$x>2$ (×) ⋯ (※)

(5) $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=x\cdot15\cdot\cos\angle C=x\cdot15\cdot\frac{x^2+5^2-(x+1)^2}{2\cdot x\cdot 5}=\frac{3}{2}\cdot(x^2+25-x^2-2x-1)$

$=\frac{3}{2}(24-2x)=36-3x\underset{\uparrow}{<}36-6=30$ (○)

(※)代入

選(1)(2)(5)

12.

(1) $n(S)=\frac{7!}{2!2!3!}=210$

黑黑 白白紅紅紅，排列

$n(A)=\frac{6!}{2!3!}=60$，$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{60}{210}=\frac{2}{7}$

$n(B)=\overbrace{\frac{5!}{2!3!}}^{\text{白白紅紅紅排列}}\times\overbrace{C^6_2}^{\text{黑球插空}}=150$，$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{150}{210}=\frac{5}{7}$，$P(A)<P(B)$ (×)

(2) $n(C)=\overbrace{\frac{4!}{2!2!}}^{\text{黑黑白白 排列}}\times\overbrace{C^5_3}^{\text{紅球插空}}=60$，$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{60}{210}=\frac{2}{7}$ (○)

(3)(4)(5) $P(C|A)=\frac{P(C\cap A)}{P(A)}=\frac{n(C\cap A)}{n(A)}$

$C\cap A$ 表 黑球相鄰，但紅球不相鄰 ⇒ 黑黑 白白 排列，紅球插空

$n(C\cap A)=\frac{3!}{2!}\times C^4_3=12$

∴ $P(C|A)=\frac{12}{60}=0.2$

$$P(C|B)=\frac{n(C\cap B)}{n(B)}$$

$C\cap B$ 表示 黑球不相鄰且紅球不相鄰，可想成 $C - C\cap A$

(紅球不相鄰 — 紅球不相鄰且黑球相鄰)

$n(C\cap B)=n(C)-n(C\cap A)=60-12=48$

$\therefore P(C|B)=\frac{48}{150}=\frac{8}{25}=0.32$　　　選 (2)(5) #

13.

(1) $\begin{cases} y=x^3+ax^2+bx+c \\ y=x^2+100 \end{cases}$，　$x^3+ax^2+bx+c=x^2+100$，　$x^3+(a-1)x^2+bx+c=0$

三次函數必有實根，故必有交點 (x)

(2)

$f(0)f(1)<0$，表示 $(0,1)$ 之間有實根

$f(0)f(2)>0 \Rightarrow f(1)f(2)<0$ 表示 $(1,2)$ 之間有實根.

三次式的解為 三實根 或 一實根二虛根 $\Rightarrow$ 故三實根 (o)

(3)

$f(x)=0$ 有一根 $1+3i$ 且為有理係數，故有另一根 $1-3i$

$f(x)$ 有因式 $(x-(1+3i))(x-(1-3i))=x^2-2x+10$

$\therefore f(x)=1(x^2-2x+10)(x+\frac{c}{10})$，故另一根 $-\frac{c}{10}$ 為有理數 (o)

(4)

$f(1)=1+a+b+c$

$f(2)=8+4a+2b+c$

$f(3)=27+9a+3b+c$

$f(4)=64+16a+4b+c$

$f(2)-f(1)=7+3a+b$

$f(3)-f(2)=19+5a+b$

$f(4)-f(3)=37+7a+b$

$7+3a+b=19+5a+b \Rightarrow 2a=-12,\ a=-6$

$37+7a+b=19+5a+b \Rightarrow 2a=-18,\ a=-9$　　(不合) (x)

(5) $g(1)=1,\ g(2)=2,\ g(3)=4,\ g(4)=8$

$$g(x)=8\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}+4\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}+2\cdot\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}+1\cdot\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}$$

令 $f(x)=k\cdot g(x)$，其中 x^3 係數為 1，即為所求。(o)　　選 (2)(3)(5) #

A. 每8秒前進24單位.

$116 = 24\times 4+20$ 故經過4個8秒，再走20單位(5秒)

故 $4\times 8+5=\underline{37}$ ※

B. 設E的法向量 $\vec{n}$.

$\vec{n}\perp\vec{L_1}$ 且 $\vec{n}\perp\vec{L_2}$ ⇒ $\vec{n}\parallel\vec{L_1}\times\vec{L_2}$

$=(1,-6,4)$

$$\begin{array}{cccccc} \cancel{2} & -3 & -5 & 2 & -3 & \cancel{-5} \\ \cancel{0} & 2 & 3 & 0 & 2 & \cancel{3} \\ \hline & 1, & -6, & 4 & & \end{array}$$

又E過 L_1 上點(0,0,0)，E的方程式為 $\underline{x-6y+4z\overset{(0,0,0)}{=}0}$ ※

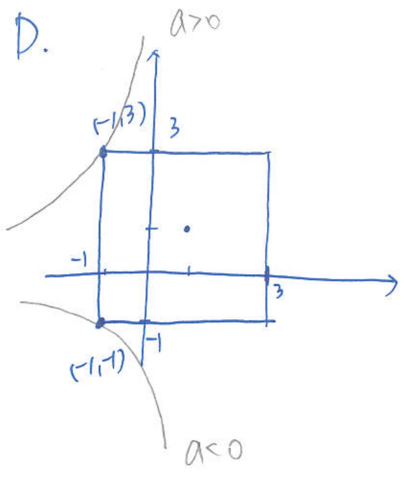
C. $n(S)=C^9_3=84$

討論完全平方數(小→大)，可能如下：

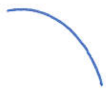
(1,2,8), (1,4,9), (2,3,6), (2,4,8), (2,8,9), (3,6,8)，共6組

$p=\frac{6}{84}=\underline{\frac{1}{14}}$ ※

D.



$y=a\cdot 2^x$，若 $a>0$， ⇒ 過(-1,3)，得 $3=a\cdot 2^{-1}$，$a=6$

$a<0$， ⇒ 過(-1,-1)得 $-1=a\cdot 2^{-1}$，$a=-2$

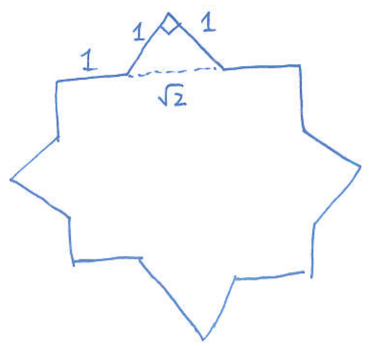
$\therefore \underline{-2\le a\le 6}$ #

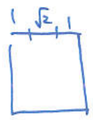
E.

$(\sqrt[3]{49})^{100}=\left[(7^2)^{\frac{1}{3}}\right]^{100}=7^{\frac{200}{3}}=(10^{\log 7})^{\frac{200}{3}}=10^{\frac{200}{3}\log 7}\approx 10^{56.34}=10^{0.34}\times 10^{56}$

又 $2\approx 10^{0.301}<10^{0.34}<10^{0.4771}\approx 3$，∴ $\underline{m=2,\ n=56}$ ※

F.

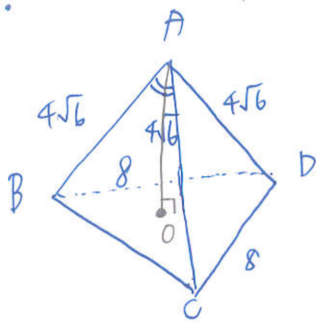


面積 = 

+ 4 

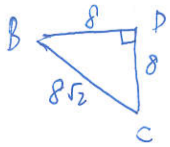
$=(2+\sqrt{2})^2+4\times\left(\frac{1}{2}\times 1\times 1\right)=6+4\sqrt{2}+2=\underline{8+4\sqrt{2}}$ ※

9.



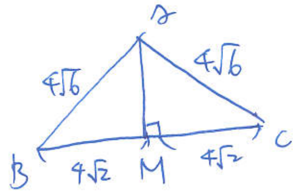
$$\overline{BC}=\sqrt{(4\sqrt6)^2+(4\sqrt6)^2-2(4\sqrt6)(4\sqrt6)\times\cos A}$$

$$=4\sqrt6\sqrt{1+1-2\times\frac{1}{3}}=4\sqrt6\times\frac{2}{\sqrt3}=8\sqrt2$$

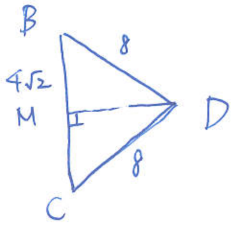


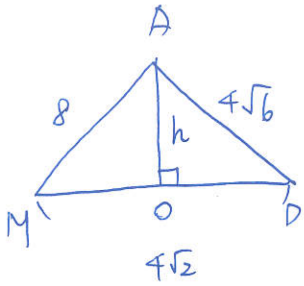
$\triangle BCD$ 面積為 $\frac{1}{2}\times8\times8=16$

設 B、C 中點 M，$\overline{AM}=\sqrt{(4\sqrt6)^2-(4\sqrt2)^2}=8$



$\overline{DM}=\sqrt{8^2-(4\sqrt2)^2}=4\sqrt2$





$$\sqrt{8^2-h^2}+\sqrt{(4\sqrt6)^2-h^2}=4\sqrt2$$

$$\sqrt{64-h^2}=4\sqrt2-\sqrt{96-h^2}$$

平方 $\Rightarrow 64-h^2=32-8\sqrt2\sqrt{96-h^2}+96-h^2$

$\Rightarrow 64=8\sqrt2\sqrt{96-h^2}$，$4\sqrt2=\sqrt{96-h^2}$

$\Rightarrow 32=96-h^2$，$h=8$，即 $\angle AMD=90^\circ$

$\because$ $\overline{MD}\perp\overline{BC}$ 且 $\overline{MD}\perp\overline{AM}$，$\therefore$ $\overline{MD}$ 是 D 到平面 ABC 的距離

$=\underline{4\sqrt2}$ ※