1. $\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{10}{n}=\frac{1+2+\cdots+10}{n}=\frac{55}{n}$ 是整數

$\therefore n|55$ 且 n 是正整數 $\Rightarrow n=1,5,11,55 \Rightarrow$ 共 4 個 (4) ※

2. 餘式定理，$f(x)$ 除以 $(x-a)$ 之餘式為 $f(a)$

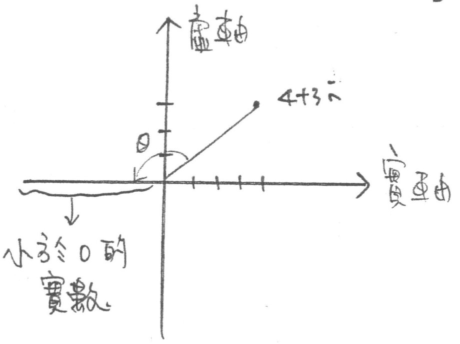
$\therefore g(x)$ 除以 $(x-2)$ 之餘式為 $g(2)=f(f(2))=f(3)=11$

$f(2)=2^3-2\cdot2^2-2+5=3$

$f(3)=3^3-2\cdot3^2-3+5=11$ (5) ※

3. ※複數常考幾何意義，請弄熟複數極式及其運算

$(4+3i)(\cos\theta+i\sin\theta)$ 可以想成複數平面上將 $4+3i$ 繞原點旋轉 θ



小於 0 的實數表示負的實軸

$\therefore \theta$ 為第二象限角 (2) ※

4. ※向量與△面積比常用公式：若 $l\overrightarrow{PA}+m\overrightarrow{PB}+n\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，

則 $\triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PCA=|n|:|l|:|m|$

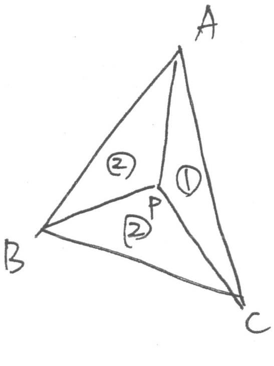
（若 l,m,n 全正，表示 P 在 △ABC 內部）

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AP}=\frac{1}{5}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB})+\frac{2}{5}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PC})$

$\Rightarrow 5\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{PC}$

$\Rightarrow -2\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

$\Rightarrow \triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PCA=2:2:1$



$\therefore \frac{\triangle ABP}{\triangle ABC}=\frac{2}{5}$

(3) ※

5.

3小時 70%聽到訊息，代入 ⇒ $70\% = 100(1-2^{-3k})\%$

T 99% $99\% = 100(1-2^{-Tk})\%$ —②

$\therefore \frac{7}{10} = 1 - 2^{-3k} \Rightarrow 2^{-3k} = \frac{3}{10}$，代入② ⇒ $99 = 100\left[1-\left(\frac{3}{10}\right)^{\frac{T}{3}}\right]$

$\left(2^{-k} = \left(\frac{3}{10}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$

$\therefore \frac{99}{100} = 1 - \left(\frac{3}{10}\right)^{\frac{T}{3}} \Rightarrow \left(\frac{3}{10}\right)^{\frac{T}{3}} = \frac{1}{100}$ ※指數位置有未知數 ⇒ 取 log

取 log ⇒ $\log\left(\frac{3}{10}\right)^{\frac{T}{3}} = -2 \Rightarrow \frac{T}{3}(\log 3 - 1) = -2$

$\Rightarrow -0.5229\,T = -6 \Rightarrow T = 11.47$

(4) #

6. 看截距.

L_1 與 x軸交於 $(-b, 0) \Rightarrow -b > 0 \Rightarrow b < 0$

y $(0, \frac{-b}{a}) \Rightarrow \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow a < 0$

L_2 x $(-d, 0) \Rightarrow -d < 0 \Rightarrow d > 0$

y $(0, \frac{-d}{c}) \Rightarrow \frac{-d}{c} > 0 \Rightarrow c < 0$

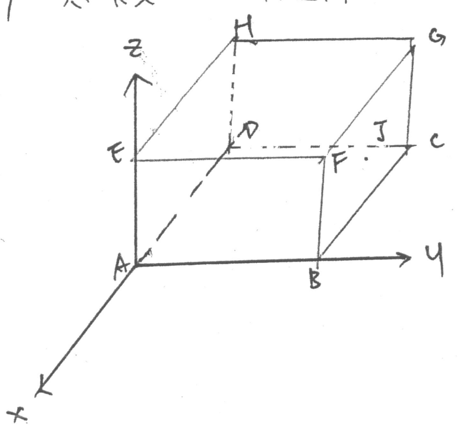
L_1 斜率 $\frac{-1}{a}$；L_2 斜率 $\frac{-1}{b}$

$\Rightarrow \frac{-1}{a} > \frac{-1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$，(小心 a, 正負)

同乘 $ab > 0 \Rightarrow \ < a$

(4)(5) #

7. ※類似此有直角 ⇒ 坐標化



$A(0,0,0)$ $J(\frac{-1}{2}, 1, \frac{1}{2})$ $B(0,1,0)$

$D(-1,0,0)$ $E(0,0,1)$

$\overrightarrow{AJ} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD} + c\overrightarrow{AE}$

$(\frac{-1}{2}, 1, \frac{1}{2}) = a(0,1,0) + b(-1,0,0) + c(0,0,1)$

$\Rightarrow a = 1,\ b = \frac{1}{2},\ c = \frac{1}{2}$

(1)(2)(3)(4) #

8. (1) $\sqrt{2} > \sqrt[3]{2} \Rightarrow \sqrt{2}-\sqrt[3]{2} > 0$ (o)

(2) $\log_2 3 > \log_2 2 = 1$ (o)

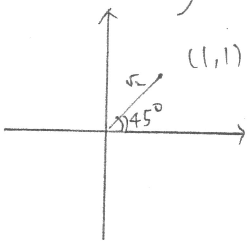
(3) $\log_3 2 < \log_3 3 = 1$ (x)

(4) $\log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$ (x)

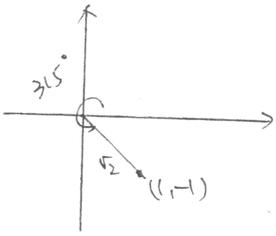
(5) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} > \log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$ (o)

(1)(2)(5) ※

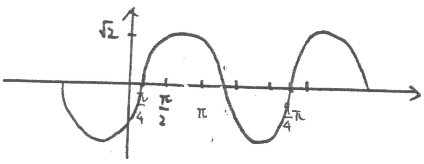
9. (1) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x+45^\circ) \Rightarrow$ 週期 2π

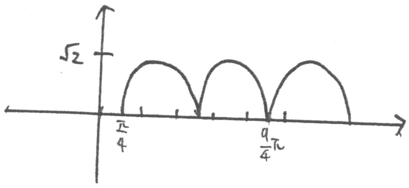


(2) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x+315^\circ) \Rightarrow$ 週期 2π

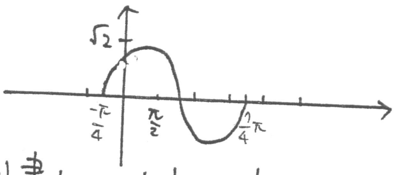


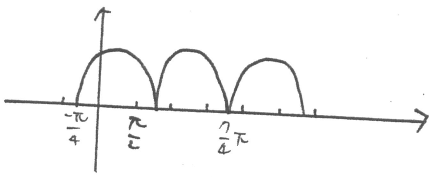
(3) 先畫 $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x+45^\circ) \longrightarrow |\sin x + \cos x|$ $\Rightarrow$ 週期 π



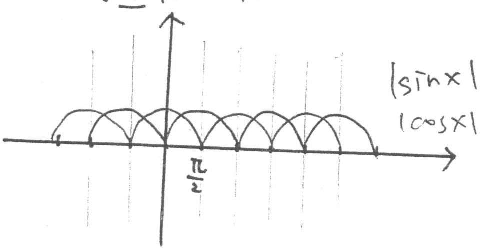


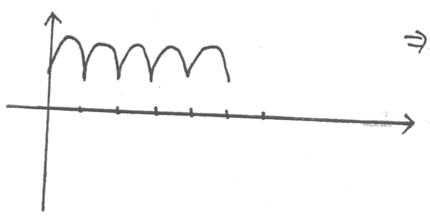
(4) 先畫 $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x+315^\circ) \longrightarrow |\sin x - \cos x|$ $\Rightarrow$ 週期 π





(5) 先分別畫 $|\sin x|$、$|\cos x|$ $\rightarrow$ $|\sin x| + |\cos x|$ $\Rightarrow$ 週期 $\frac{\pi}{2}$





(3)(4) ※

10. 若 $x>0$，則 $y>0$.

等價(否逆)命題：若 $y\le 0$，則 $x\le 0$

(1) 不知道

(2) 即否逆命題

(3) 不知道

(4) 若 $x>1$，則 $x>0$。若 $x>0$，則 $y>0$ (o)

(5) 若 $y<0$，則 $y\le 0$。若 $y\le 0$，則 $x\le 0$ (o)

(2)(4)(5)#

11. ※三平面相交情形：① 先判斷是否有平行或重合

② 若無平行或重合
- ① 無解 $\Leftrightarrow$ 三平面交三平行線
- ② 一解 $\Leftrightarrow$ 三平面交於一點
- ③ 無限多解 $\Leftrightarrow$ 三平面交一線.

(1) 若平行 $(\pi_a // E_1) \Rightarrow \frac{1}{1}=\frac{-4}{-2}=\frac{a}{1}$，不可能 (x)

(2) 若 $\pi_a \perp E_1 \Rightarrow (1,-4,a)\cdot(1,-2,1)=0 \Rightarrow 1+8+a=0 \Rightarrow a=-9$

(3) 若 π_a, E_1, E_2 交於一點，先消未知數
$$\begin{cases} x-4y+az=10 & —① \\ x-2y+z=5 & —② \\ 2x-5y+4z=-3 & —③ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ②-① \Rightarrow 2y+(1-a)z=-5 \\ ②\times 2-③ \Rightarrow y+(-2)z=13 \end{cases}$$
$\because \frac{2}{1}\ne\frac{1-a}{-2} \Rightarrow$ 交於一點 (o)

(4) $\frac{2}{1}=\frac{1-a}{-2}=\frac{-5}{13} \Rightarrow$ 交於一線 (x)

不可能

(5) $\frac{2}{1}=\frac{1-a}{-2}\ne\frac{-5}{13} \Rightarrow$ 沒有交點 (o)

$\therefore a=5$

(2)(3)(5)#

填充

A. 設 $a_1, a_2, \cdots, a_{50}$ 中有 x 個 -1

y 個 0

$50-x-y$ 個 1

$\because a_1+a_2+\cdots+a_{50}=9 \Rightarrow (-1)\cdot x+(50-x-y)=9 \Rightarrow 2x+y=41$

$(a_1+1)^2+(a_2+1)^2+\cdots+(a_{50}+1)^2=107 \Rightarrow 1\cdot y+4\cdot(50-x-y)=107 \Rightarrow 4x+3y=93$

$\Rightarrow y=11$

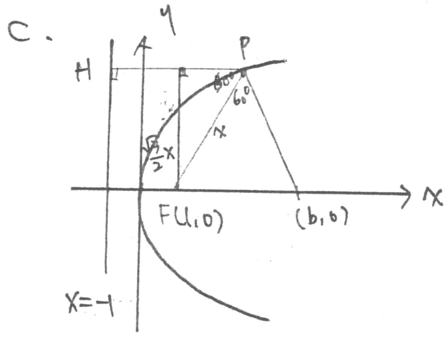
11#

B. 3389 排列 $\Rightarrow \frac{4!}{2!} = 12$

$\therefore$ 機率 $\frac{1}{12}$

$\underline{\frac{1}{12}}$ #

C.



由拋物線定義式知

$\Rightarrow \overline{PF} = \overline{PH}$，設 $\overline{PF} = \overline{PH} = x$

$\therefore$ P點坐標可寫成 $(x-1, \frac{\sqrt{3}}{2}x)$

P在 $y^2 = 4x$ 上 $\Rightarrow \frac{3}{4}x^2 = 4(x-1)$

$\Rightarrow 3x^2 - 16x + 16 = 0$

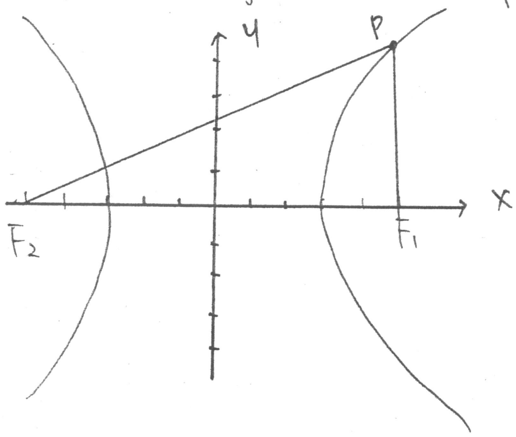
$\Rightarrow (3x-4)(x-4) = 0$

$\Rightarrow x = \frac{4}{3}$ or 4

若 $x = \frac{4}{3}$，$b < 1$，若 $x = 4$，$P(3, 2\sqrt{3}) \Rightarrow b = 5$

$\underline{5}$ #

D. 老圓錐曲線，大多考定義



$\because \overline{PF_1} : \overline{PF_2} = 1 : 3$

令 $\overline{PF_1} = t \Rightarrow \overline{PF_2} = 3t$

又定義為 $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a = 6$

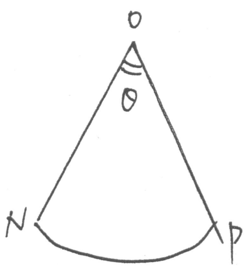
$\Rightarrow 2t = 6 \Rightarrow t = 3$

$\therefore \overline{PF_1} = 3$，$\overline{PF_2} = 9$ 又 $\overline{F_1F_2} = 2c = 10$

$\therefore \triangle PF_1F_2$ 周長為 22

$\underline{22}$ #

E. 要先發現 $O(0,0,0)$ 是球 $x^2+y^2+z^2=1$ 的球心，所以圓 C 之圓心即為 O
(且 N, P 在球上)



$\overset{\frown}{NP} = r\theta = 1 \cdot \theta = \theta$.

$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{ON}||\overrightarrow{OP}|} = \frac{(0,0,1)\cdot(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{11}}{4}, \frac{-1}{2})}{1 \times 1} = \frac{-1}{2}$，$\Rightarrow \theta = \frac{2}{3}\pi$

$\underline{\frac{2}{3}\pi}$ #

F、由根與係數知，兩根之積為 $\frac{1}{k}$

$\Rightarrow \frac{5}{71} < \frac{1}{k} < \frac{6}{71} \Rightarrow \frac{71}{6} < k < \frac{71}{5} \Rightarrow 11.\cdots < k < 14.\cdots$

$\Rightarrow k = 12$ or 13 —①

又 $kx^2+7x+1=0$ 有二相異實根 $\Rightarrow b^2-4ac>0$

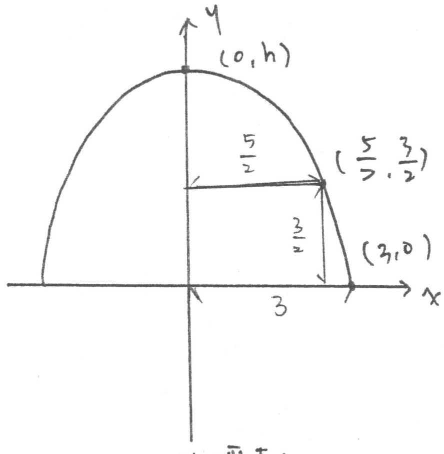
$\Rightarrow 49-4k>0$

$\Rightarrow k<12.\cdots$ —②

由 ①、② 知 $\Rightarrow k=12$

$\underline{12}$ #

G.



對稱軸

坐標化 $\Rightarrow x^2 = 4c(y-h)$

$(\frac{5}{2},\frac{3}{2})$ 代入 $\Rightarrow \frac{25}{4} = 4c(\frac{3}{2}-h)$ —①

$(3,0)$ 代入 $\Rightarrow 9 = 4c(0-h)$ —②

$\frac{①}{②} \Rightarrow \frac{\frac{25}{4}}{9} = \frac{\frac{3}{2}-h}{-h} \Rightarrow \frac{-25}{36}h = \frac{3}{2}-h$

$\Rightarrow \frac{11}{36}h = \frac{3}{2} \Rightarrow h = \frac{54}{11}$

$\underline{\frac{54}{11}}$ #

求 n 次的期望值，算一次再乘以 n

H. ① 五個選項已知兩個選項不正確，則答對的機率 $\frac{1}{3}$

② 五個選項都不確定，則答對的機率 $\frac{1}{5}$

$\therefore 16\times4 + 6\times\underbrace{\left(\frac{1}{3}\times4+\frac{2}{3}\times(-1)\right)}_{\text{①的期望值}} + 3\times\underbrace{\left(\frac{1}{5}\times4+\frac{4}{5}\times(-1)\right)}_{\text{②的期望值}} = 68$

$\underline{68}$ #

I、集中趨勢數：受伸縮、平移的影響。

離差：只受伸縮影響，不受平移影響

	平均	標準差
x	16	3.5
$y=\frac{9}{5}x+32$	$16\times\frac{9}{5}+32$ $=$ 60.8	$3.5\times\frac{9}{5}$ $=$ 6.3

$\underline{60.8\ ;\ 6.3}$ #