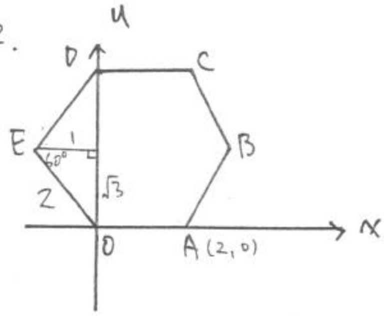
1. 9的倍數：數字和為9的倍數

$$9 \mid 9+2+a+9+2+b \Rightarrow 9 \mid a+b+22 \Rightarrow a+b=5 \text{ or } 14$$

(3) #

2.



$\therefore D(0, 2\sqrt{3})$, $E(-1, \sqrt{3})$

$\overrightarrow{DE} = (-1, -\sqrt{3})$

(2) #

3.

$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$

(1) $\frac{1}{2}\sin 40^\circ$

(2) $\frac{1}{2}\sin 70^\circ$

(3) $\frac{1}{2}\sin 100^\circ$　　θ愈接近90°，$\sin\theta$愈大

(4) $\frac{1}{2}\sin 130^\circ$

(5) $\frac{1}{2}\sin 160^\circ$

(3) #

4. ※看到未知數在指數或指數位置很難處理 ⇒ 取 log

$\log 100 \le \log (1.5)^n \le \log 500$

$\Rightarrow 2 \le n \log 1.5 \le 2 + \log 5$

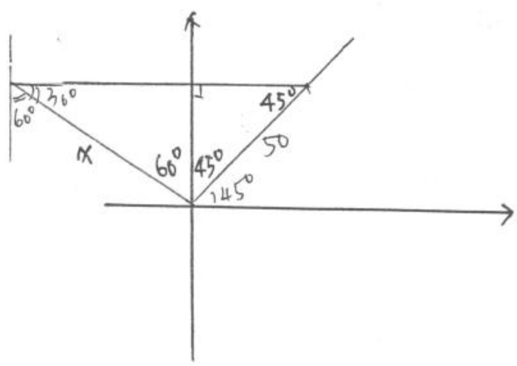
$\Rightarrow 2 \le n(\log 3 - \log 2) \le 2.699$

$\Rightarrow \frac{2}{0.1761} \le n \le \frac{2.699}{0.1761} \Rightarrow 11.3 \le n \le 15.3 \Rightarrow n = 12, 13, 14, 15$

共4個

(2) #

5.



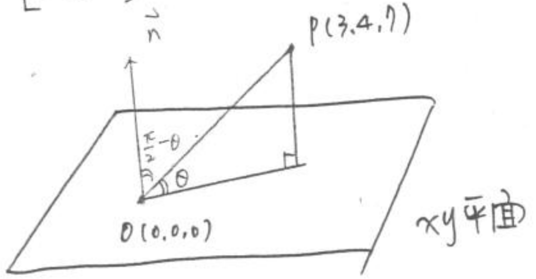
設所求為 x

$$\frac{x}{\sin 45^\circ} = \frac{50}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{50}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = 50\sqrt{2} \fallingdotseq 70.7$$

(4) #

6.

[法一]



$\overleftrightarrow{PO}$ 與 xy平面之夾角即為最小角 θ.

即 $\overleftrightarrow{PO}$, $\vec{n}$ 所夾角度為 $\frac{\pi}{2}-\theta$

不難發現題目選項(2) (3,4,0)為

P之投影點，此時即為最小角

[法二] 算 $\cos\theta = \frac{\vec{OP}\cdot\vec{OQ}}{|\vec{OP}||\vec{OQ}|}$. 找 $\cos\theta$ 值最大，即 θ 值最小

(2) #

7. $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$，即長度倒數，角度 θ 變 $(-\theta)$

∵ z 在圓外即長度大於 1. ∴ $\frac{1}{z}$ 長度小於 1 在圓內

∵ $\theta \in \mathrm{I} \Rightarrow -\theta \in \mathrm{IV}$ ∴ $\frac{1}{z}$ 選 (D)

(4) #

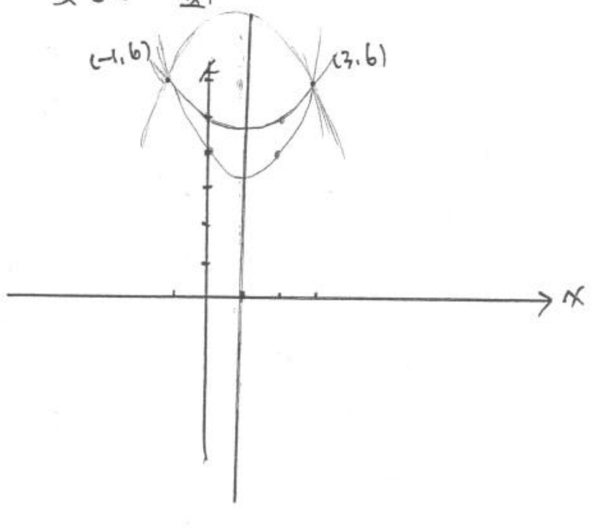
8. ① 不相交 ⇒ 空集合

② 相切 ⇒ 一點

③ 交於一圓

(1)(2)(4) #

9.



由拋物線對稱性知

⇒ 對稱軸為 x=1 (上下型)

(1) 頂點之y值大於0 則不與x軸相交

(2) 上下型，任意 值，均有意義

⇒ 與y軸相交

(3) 通過(2,5) ⇒ 也通過(0,5)

(4) 上下型的拋物線是二次函數.

一個x值只對應唯一y值

(5) 若通過(0,3)、(-1,6)，又已知為

對稱軸 x=1 之拋物線

可以設拋物線方程式 $y=a(x-1)^2+b$

$(0,3)$ 代入 $\Rightarrow 3=a+b$
$(-1,6)$ 代入 $\Rightarrow 6=4a+b$ $\Rightarrow a=1,\ b=2$

∴ 頂點之 y 坐標為 2

(2)(3)(5) #

10. $f(0)=1,\ f(1)=-4,\ f(-1)=-6,\ f(\infty)=\infty$

∴ $(0,1)$, $(-1,0)$, $(1,\infty)$ 之間有實根.

$f(x)$ 為三次式 ⇒ $f(x)$ 恰有 3 實根 ⇒ x 小於 -1 無實根

(5) $f(x)-10$ 仍是三次式 ⇒ 解的可能 ① 三實根 ⇒ 一定有實根
(實係數) ② 一實二虛

(1)(2)(5) #

11. ※ 三平面相交情形：① 先判斷是否平行或重合 ② 若無平行或重合 ⇒ 判別解的個數 (消未知數)

(1)
$$\begin{cases} x+2y-3z=1 & —① \\ x+3y-2z=-1 & —② \\ x+y+z=1 & —③ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ②-①: y+z=-2 \\ ①-③: y-4z=0 \end{cases}$$
⇒ 交於一點 ⇒ 一解.

(2)
$$\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ x+3y-2z=-1 \\ x-y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ②-①: y+z=-2 \\ ①-③: 3y-4z=0 \end{cases}$$
⇒ 交於一點

(3)
$$\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ x+3y-2z=-1 \\ x+4y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ②-①: y+z=-2 \\ ③-②: y+z=2 \end{cases}$$
⇒ 無解 ⇒ 三平面交三平行線

(4)
$$\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ x+3y-2z=-1 \\ x+y-4z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ②-①: y+z=-2 \\ ①-③: y+z=0 \end{cases}$$
⇒ 無解 ⇒ 三平面交三平行線

(5)
$$\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ x+3y-2z=-1 \\ x+2y-3z=1 \end{cases}$$
⇒ 二重合一相交 ⇒ 交於一線

(2)(5) #

12. (1) 中位數 50% ⇒ 40～50
(2) 第一四分位數 25% ⇒ 20～30
(3) 第三四分位數 75% ⇒ 50～60
(4) 低於 30 分 ⇒ 10.45% + 8.18% + 11.85% = 30.48%
(5) 良格 ⇒ 10.81% + 7.06% + 3.84% + 1.57% = 24.28%

(1)(2)(3) #

填充.

A. $\dfrac{69\times40+78\times25+74\times35}{40+25+35}=73$ 　　$\underline{73}$ #

B. $(x+1)^6=x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1$，除以 x^2+1.

[法一] 高次求餘式：$x^2=-1$ 代入 $\Rightarrow (-1)^3+6x(-1)^2+15(-1)^2+20x(-1)+15(-1)+6x+1$

$=-8x$

[法二] 長除法 $\Rightarrow$ 自己算！

$\underline{-8;0}$ #

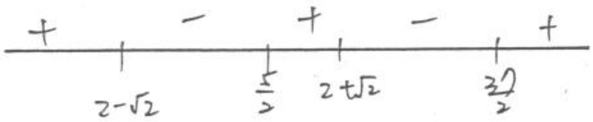
C. $\log_3 x^7+\log_{\frac{1}{3}} x=24 \underset{\text{化同底}}{\Rightarrow} 7\log_3 x-\log_3 x=24 \Rightarrow 6\log_3 x=24$

$\Rightarrow \log_3 x=4 \Rightarrow x=3^4=81$ 　　$\underline{81}$ #

D. x^2-4x+2，$(b^2-4ac=(-4)^2-4\times2=8>0)$ $\Rightarrow x^2-4x+2=0 \Rightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{8}}{2}=2\pm\sqrt{2}$

∴ 要分解

∴ $(x^2-4x+2)(2x-5)(2x-37)\le0 \Rightarrow (x-(2+\sqrt2))(x-(2-\sqrt2))(2x-5)(2x-37)\le0$



$\Rightarrow \begin{cases} 2+\sqrt2\le x\le\frac{37}{2} \\ 2-\sqrt2\le x\le\frac{5}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\le x\le18 \\ 1\le x\le2\end{cases}$

$\Rightarrow$ 共 $15+2$ 個 　　$\underline{17}$ #

E. $n(S)=4^3=64$

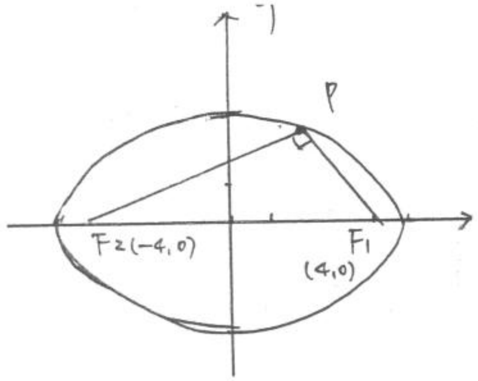
可化成三角形時 $a,b,c \Rightarrow$

444	⇒ 1	,333	⇒ 1
443	⇒ 3	,332	⇒ 3
442	⇒ 3	,331	⇒ 3
441	⇒ 3	.322	⇒ 3
433	⇒ 3	,321 (x)	
432	⇒ 6	.311 (x)	
431 (x)		,222	⇒ 1
422 (x)		,221	⇒ 3
421 (x)		,211 (x)	
411 (x)		,111	⇒ 1

$\Rightarrow$ 共 34 個

$\dfrac{34}{64}=\dfrac{17}{32}$ 　　$\underline{\dfrac{17}{32}}$ #

F.



P點可用參數式表成 $(5\cos\theta, 3\sin\theta)$

$\overline{PF_1} \perp \overline{PF_2} \Rightarrow \overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$

$\Rightarrow (4-5\cos\theta, -3\sin\theta)\cdot(-4-5\cos\theta, -3\sin\theta)$

$\Rightarrow 25\cos^2\theta - 16 + 9\sin^2\theta = 0$

$\Rightarrow 16\cos^2\theta - 7 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\Rightarrow \sin\theta = \pm\frac{3}{4}$

P在上半平面 $\Rightarrow 3\sin\theta = \frac{9}{4}$

$\frac{9}{4}$ #

G. $x^2+y^2-6x-2y+9=0$

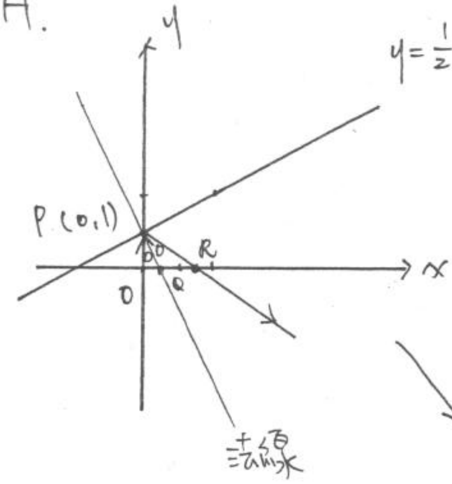
$\Rightarrow (x-3)^2+(y-1)^2 = 1 \Rightarrow$ 參數式 $\begin{cases} a = 3+\cos\theta \\ b = 1+\sin\theta \end{cases}$

$a^2+b^2-2b = 9+6\cos\theta+\cos^2\theta+1+2\sin\theta+\sin^2\theta-2-2\sin\theta$

$= 6\cos\theta + 9 \le 15$

15 #

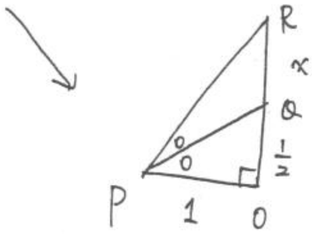
H.



$y=\frac{1}{2}x+1$ 先作法線方程式 $\Rightarrow y=-2x+1$

(垂直 $y=\frac{1}{2}x+1$，且通過 $(0,1)$)

設法線與 x 軸交於 Q 點 $\Rightarrow Q(\frac{1}{2}, 0)$



設 $\overline{QR} = x$.

由內角平分線性質

$\frac{\overline{PO}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{QO}}{\overline{QR}} \Rightarrow \frac{1}{\overline{PR}} = \frac{\frac{1}{2}}{x} \Rightarrow \overline{PR} = 2x$

$\because$ POR 為直角三角形 $\Rightarrow (2x)^2 = 1^2 + (\frac{1}{2}+x)^2$

$\Rightarrow 4x^2 = 1+\frac{1}{4}+x+x^2$

$\Rightarrow 3x^2 - x - \frac{5}{4} = 0$

$\Rightarrow 12x^2 - 4x - 5 = 0$

$\Rightarrow (2x+1)(6x-5) = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-1}{2}$ or $\frac{5}{6}$ (取正)

R之x坐標 $= \frac{1}{2}+\frac{5}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$\frac{4}{3}$ #