1.
$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=15$ —①

$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=30$ —②

$$②-① \Rightarrow \underbrace{(a_2-a_1)}_{d}+\underbrace{(a_4-a_3)}_{d}+\underbrace{(a_6-a_5)}_{d}+\underbrace{(a_8-a_7)}_{d}+\underbrace{(a_{10}-a_9)}_{d}=15$$

$\Rightarrow 5d=15$, $d=3$

(3) #

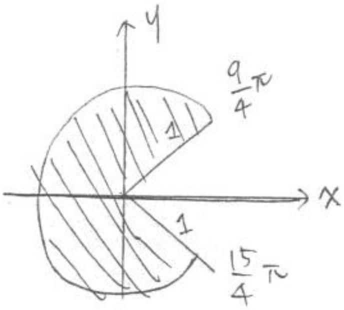
2.
$$10^{100}=100^{50}>100^{10}$$
$$>50^{50}$$
$$>51\times52\times\cdots\times100$$

$\therefore 10^{100}$ 最大

$$\frac{100!}{50!}=\underbrace{51\times52\times\cdots\times100}_{50個}>50!$$

(2) #

3.
$$D=\{w \mid w=z^3,\ z\in A\}=\{w \mid w=r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta),\ 0\le r\le1,\ \tfrac{3\pi}{4}\le\theta\le\tfrac{5\pi}{4}\}$$
$$=\{w \mid w=r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta),\ 0\le r^3\le1,\ \tfrac{9\pi}{4}\le3\theta\le\tfrac{15}{4}\pi\}$$



(5) #

4. xy平面上的点P為 $(x,y,0)$

$\overrightarrow{PA}=(1-x,\ 2-y,\ 3)$, $\overrightarrow{PB}=(7-x,\ 6-y,\ 5)$

$\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB} \Leftrightarrow \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0 \Rightarrow (1-x)(7-x)+(2-y)(6-y)+15=0$

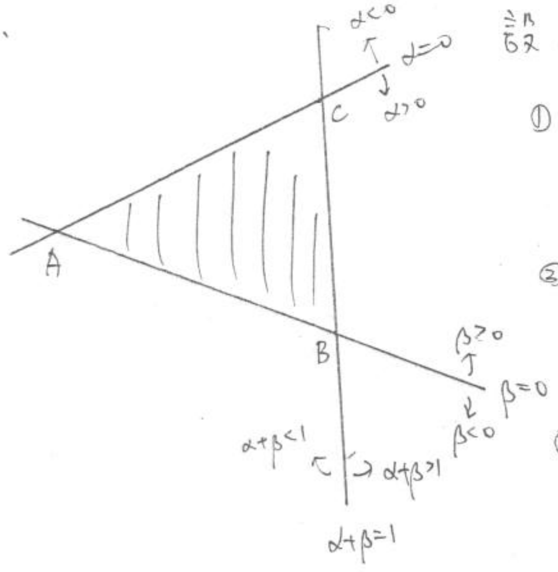
$\Rightarrow x^2+y^2-8x-8y+7+12+15=0$

$\Rightarrow (x-4)^2+(y-4)^2=-2$

$\therefore$ 空集合

(1) #

5、



設已知 $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta AC$

① 若 P 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上，即 P、B、C 三點共線

$\Leftrightarrow \alpha+\beta=1$

② 若 P 在 $\overleftrightarrow{AB}$ 上

$\Leftrightarrow \beta=0$

③ 若 P 在 $\overleftrightarrow{AC}$ 上

$\Leftrightarrow \alpha=0$

所求 $\triangle ABC$ 內部 $\Leftrightarrow \alpha+\beta<1,\ \alpha>0,\ \beta>0.$

$\therefore\ t+\frac{1}{3}<1,\ t>0.$

$\Rightarrow\ 0<t<\cancel{\frac{1}{3}}\frac{2}{3}$ (4)#

6. $40\times(93\%)^5\times(107\%)^5$

令 $x=(93\%)^5\times(107\%)^5$

$\Rightarrow \log x=5(\log 0.93+\log 1.07)$

$=5(\log 9.3+\log 1.07-1)$

$=5(0.9685+0.0294-1)$

$=5(-0.0021)=-1+0.9895=\log 0.9762$

$\therefore\ x=0.9762$

原式 $=40\times 0.9762=39.048$ (1)#

7. ※題目給定若 p，則 q，還要把等價命題 若 ~q，則 ~p 列出，

其餘均無法判定

已知：外側車道大客車專用

否逆：非大客車不可用外側車道

(1)(3)(4)#

8. 可以放到圖裡面，表示不會無限延伸

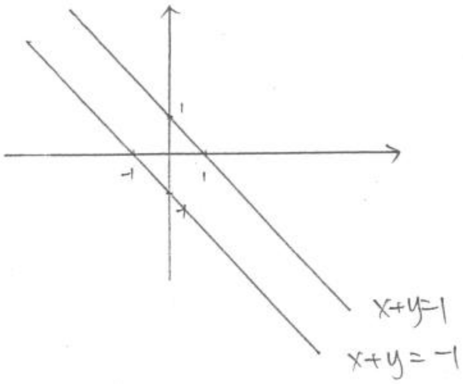
(1) 拋物線 ⇒ 會無限延伸 (×)

(2) 橢圓 ⇒ 不會無限延伸 (○)

(3) 雙曲線 ⇒ 會無限延伸 (×)

(4) $|x+y|=1$，$\begin{cases} x+y=1, & x+y>0 \\ x+y=-1, & x+y<0 \end{cases}$ ⇒ 會無限延伸 (×)

(二直線)

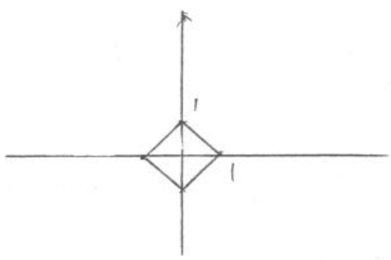


(5) $|x|+|y|=1$

畫圖(先考慮 $x\geq 0$, $y\geq 0$，再對稱 x軸，再對稱 y軸) ⇒ 不會無限延伸 (○)

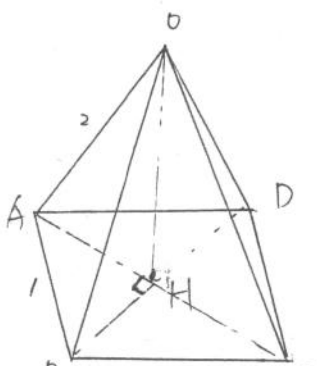
(正方形)

$x\geq 0$, $y\geq 0$ ⇒ $x+y=1$



(2)(5)#

9. 設 H 為 ABCD 的中心



(1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$

$=(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA})+(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HB})+(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HC})+(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HD})$

$=4\overrightarrow{OH}\neq\vec{0}$

(2) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$

$=(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA})+(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HB})-(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HC})-(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HD})$

$=2(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB})\neq\vec{0}$

(3) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$

$=(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA})-(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HB})+(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HC})-(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HD})$

$=\vec{0}$

(4) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA})\cdot(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HB})$

$$=|\overrightarrow{OH}|^2+\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=|\overrightarrow{OH}|^2$$

$(\overrightarrow{HA}\perp\overrightarrow{OH})$ $(\overrightarrow{HB}\perp\overrightarrow{OH})$ $(\overrightarrow{HA}\perp\overrightarrow{HB})$

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HC})\cdot(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HD})$

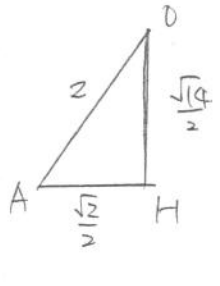
$$=|\overrightarrow{OH}|^2+\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HD}\cdot\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HD}=|\overrightarrow{OH}|^2$$

(5) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA})\cdot(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HC})$

$$=|\overrightarrow{OH}|^2+\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HC}$$

$$=\frac{14}{4}+0+0+\frac{\sqrt2}{2}\times\frac{\sqrt2}{2}\times(-1)$$

$$=\frac{14}{4}-\frac{2}{4}=3$$



(3)(4) ※

10.

和為偶數的機率 $=\dfrac{\overset{=個偶}{C^5_2}+\overset{=1個奇}{C^5_2}}{C^{10}_2}=\dfrac{20}{45}=\dfrac{4}{9}$

∴ 和為奇數的機率 $=1-\dfrac{4}{9}=\dfrac{5}{9}$ $\left(=\dfrac{C^5_1C^5_1}{C^{10}_2}\right)$

$|p-q|=\dfrac{1}{9}$

(1)(4) ※

11. ※ 實係數多項式 ⇒ 虛根共軛

有理係數(整係數)多項式 ⇒ 無理根共軛、虛根共軛.

(1)

∴ f(x) 有一根 $1+i$，且 f(x) 為實係數 ⇒ f(x) 有另一根 $1-i$ (即 $f(1-i)=0$)

(2)

∴ f(x) 為三次式，∴ f(x) 恰有三根，$\begin{cases}①\ 三實根 & (\times)\\ ②\ 一實二虛 & (\circ)\end{cases}$ (∵ 已知有二虛根)

∴ f(x) 的解為 $1+i$，$1-i$，和一實根 β

∴ $2+i$ 不是 f(x) 之解，即 $f(2+i)\neq0$

(3) $f(x)$是三次式，$\therefore$ $f(x)-\alpha$ 仍是三次式．

$\therefore$ $f(x)-\alpha$ 的解 $\begin{cases} ① 三實根 \\ ② 一實根二虛根 \end{cases}$

不論如何都有實根，設此實根 α $\Rightarrow f(\alpha)-\alpha=0 \Rightarrow f(\alpha)=\alpha$.

$\therefore$ α 是 $f(x)=\alpha$ 的實根

(4) $\because$ β 是 $f(x)$ 的實根，i.e. $f(\beta)=0 \Rightarrow f\left((\sqrt[3]{\beta})^3\right)=0$.

$\Rightarrow$ $\sqrt[3]{\beta}$ 是 $f(x^3)$ 的實根

(5) 由(1)知 $\underbrace{f(x)}_{三次}=\underbrace{(x-(1+i))(x-(1-i))}_{二次}\underbrace{(ax+b)}_{一次}$

$$=(x^2-2x+2)(ax+b)$$

$$\left.\begin{aligned} f(0)>0 &\Rightarrow 2(b)>0 \Rightarrow b>0 \\ f(2)<0 &\Rightarrow 2(2a+b)<0 \Rightarrow 2a+b<0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a<0$$

$$f(4)=10(4a+b)=10(\underbrace{2a+b}_{\overset{\wedge}{0}}+\underbrace{2a}_{\overset{\wedge}{0}})<0$$

(1)(2)(5) #

填充

A.

$$\frac{82+73+85}{3}\times 30\%+86\times 20\%+79\times 20\%+90\times 30\%$$

$$=24+17.2+15.8+27=84$$

84 #

B.

事件	抽到1000	800	600	0+1000	0+800	0+600	0+0
報酬	1000	800	600	500	400	300	0
機率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

期望值 $=1000\times\frac{1}{4}+800\times\frac{1}{4}+600\times\frac{1}{4}+500\times\frac{1}{16}+400\times\frac{1}{16}+300\times\frac{1}{16}+0\times\frac{1}{16}$

$$=2400\times\frac{1}{4}+1200\times\frac{1}{16}=600+75=675$$

675 #

C. $\log_{520} 2^a + \log_{520} 5^b + \log_{520} 13^c = 3$

$\Rightarrow \log_{520}(2^a \cdot 5^b \cdot 13^c) = 3 \Rightarrow 2^a \cdot 5^b \cdot 13^c = 520^3 = (2^3 \times 5 \times 13)^3$

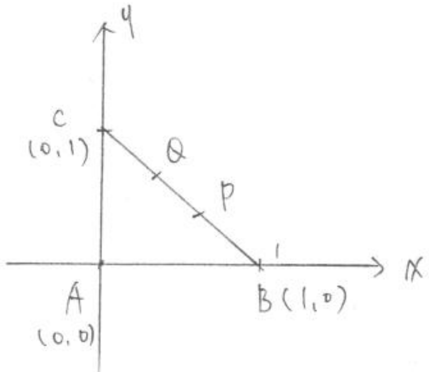
$\Rightarrow a = 9,\ b = 3,\ c = 3$

$\Rightarrow a + b + c = 15$

$\underline{15}$ #

※求夾角，基本上都是 $\cos\theta$

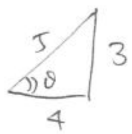
D. ※看到直角 ⇒ 可以考慮坐標化，會變簡單



$\therefore P\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right),\ Q\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$\cos\angle PAQ = \dfrac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AQ}|} = \dfrac{\frac{4}{9}}{\sqrt{\frac{5}{9}}\sqrt{\frac{5}{9}}} = \dfrac{4}{5}$

$\therefore \tan\angle PAQ = \dfrac{3}{4}$



$\underline{\frac{3}{4}}$ #

E.

$$\begin{array}{r|r|r|r} 1 & 1008 & 924 & 11 \\ & 924 & 924 & \\ \hline & 84 & 0 & \end{array}$$

$\therefore (1008, 924) = 84 = 42 \times 2$

$\therefore$ ① 若分成 84 班

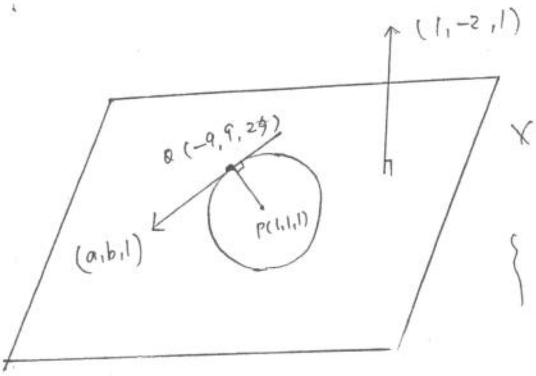
每班男生 $\frac{1008}{84} = 12$　共 23 人（不合）

每班女生 $\frac{924}{84} = 11$

② 若分成 42 班 ⇒ 每班 46 人

$\underline{42}$ #

F.



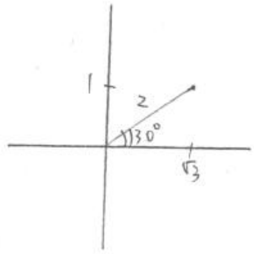
$x - 2y + z = 0$　　$\overrightarrow{PQ} = (-10, 8, 26)$

$\begin{cases} (a,b,1) \perp \overrightarrow{PQ} \Rightarrow (a,b,1)\cdot(-10,8,26) = 0 \\ (a,b,1) \perp (1,-2,1) \Rightarrow (a,b,1)\cdot(1,-2,1) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -10a + 8b + 26 = 0 \\ a - 2b + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}$

$\underline{5\ ;\ 3}$ #

G. $\sqrt{3}\sin A+\cos A = 2\sin(A+30^\circ) = 2\sin 2004^\circ$



$0^\circ \le A+30^\circ \le 390^\circ$

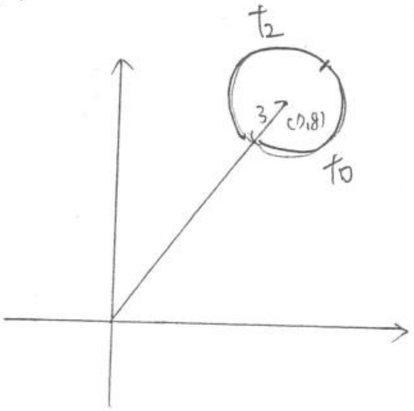
$\Rightarrow \sin(A+30^\circ) = \sin 2004^\circ = \sin 204^\circ = \sin 336^\circ$

化同界

$\therefore A+30^\circ = 336^\circ \Rightarrow A = 306^\circ$

306 #

H.



此圓與原點之最近距離為 $\sqrt{7^2+8^2}-3=7.\cdots$

遠 $\sqrt{7^2+8^2}+3=13.\cdots$

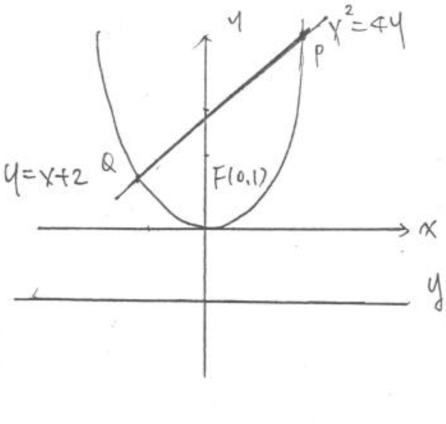
∴距離為整數的有 8, 9, 10, 11, 12, 13

但左右邊各有一個點距離為 8~13.

∴共 $6\times 2=12$

12 #

I. ※圓錐曲線多半是會利用定義式



$y=-1$(準線)

$\overline{PF}+\overline{QF} = d(P,L)+d(Q,L)$

$= (P$的 y 坐標值 $+1) + (Q$的 y 坐標值

$\begin{cases} x^2=4y \\ y=x+2 \end{cases} \Rightarrow (y-2)^2=4y$

$\Rightarrow y^2-4y+4=4y$

$\Rightarrow y^2-8y+4=0$

$\Rightarrow y_1+y_2=8$, 即 P.Q y坐標值相加

$\therefore \overline{PF}+\overline{QF} = 8+1+1 = 10$

10 #