1.

43659，數字和 $27=3^3$

$$\begin{array}{r} 1617 \\ 27\overline{)43659} \\ \underline{27} \\ 166 \\ \underline{162} \\ 45 \\ \underline{27} \\ 189 \\ \underline{189} \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 147 \\ 11\overline{)1617} \\ \underline{11} \\ 51 \\ \underline{44} \\ 77 \\ \underline{77} \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 21 \\ 7\overline{)147} \\ \underline{14} \\ 7 \\ \underline{7} \\ 0 \end{array}$$

$\therefore 43659 = 27\times 11\times 7\times 21$

$= 3^4\times 7^2\times 11$

共 3 個質因數 $\underline{(3)}$ #

2.

$11^3+12^3+\cdots+20^3=(1^3+2^3+\cdots+20^3)-(1^3+2^3+\cdots+10^3)$

$=\left(\dfrac{20\times 21}{2}\right)^2-\left(\dfrac{10\times 11}{2}\right)^2=210^2-55^2$

$=(210+55)(210-55)=41075$

$\underline{(1)}$ #

3.

$$\frac{\frac{1}{C^{39}_5}}{\frac{1}{C^{42}_6}}=\frac{C^{42}_6}{C^{39}_5}=\frac{\frac{42\times41\times40\times39\times38\times37}{720}}{\frac{39\times38\times37\times36\times35}{120}}=\frac{\overset{\cancel{6}}{\cancel{42}}\times41\times\overset{\cancel{8}\,4\,2}{\cancel{40}}}{\underset{3}{\cancel{6}}\times\underset{\cancel{6}\,3}{\cancel{36}}\times\cancel{35}}=\frac{82}{9}\doteqdot 9$$

$\underline{(4)}$ #

4. $a=7^{11}$, $b=7^{13}$

$\Rightarrow \log_7(a+b)=\log_7(7^{11}+7^{13})\underset{\uparrow}{\approx}\log_7 7^{13}=13$

$\because 7^{11}$比7^{13}小很多

$\underline{(2)}$ #

5. 設原成績為 x_i

調整後 $\Rightarrow 10\sqrt{x_i}$

$\therefore$ 調整後標準差 $=15=\sqrt{\dfrac{1}{100-1}\left[\sum_{i=1}^{100}(10\sqrt{x_i})^2-100\times65^2\right]}$

$\Rightarrow 225=\dfrac{1}{99}\times\left(100\sum_{i=1}^{100}x_i-100\times4225\right)$

$\Rightarrow 22275=100\sum_{i=1}^{100}x_i-100\times4225$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{100} x_i = 4225 + 222.75 = 4447.75$$

$$\text{平均} = \frac{\sum_{i=1}^{100} x_i}{100} = 44.4775$$

(5) *

6\. ① 若 P 在 $\overleftrightarrow{AB}$ 上表 $P.A.B$ 三点共線

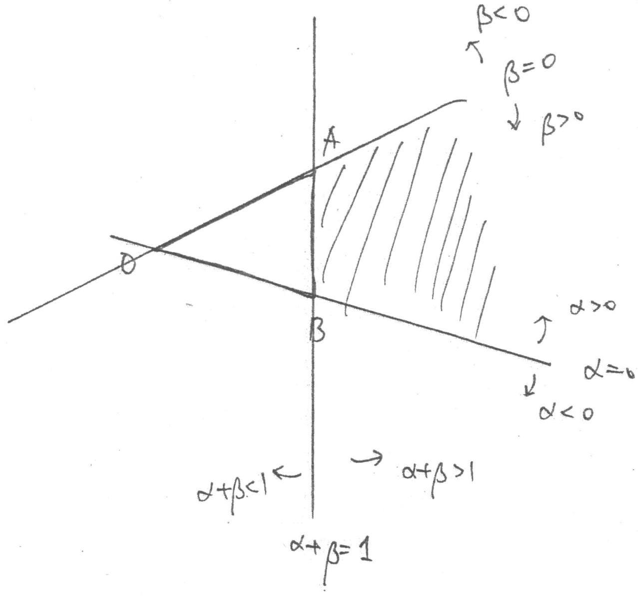
$\vec{OP} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB} \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$

② 若 P 在 $\overleftrightarrow{OA}$ 上

$\vec{OP} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB} \Leftrightarrow \beta = 0$

③ 若 P 在 $\overleftrightarrow{OB}$ 上

$\vec{OP} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB} \Leftrightarrow \alpha = 0.$



灰色區域表示 $\alpha+\beta>1$, $\alpha>0$, $\beta>0$.

(1)(2) *

7\.

(1) m_{CD} 最斜且斜率為正 $\Rightarrow$ m_{CD} 最大

(2) m_{BC} 最斜且斜率為負 $\Rightarrow$ m_{BC} 最小.

(3) m_{BC}、m_{CD} 一樣斜且一正一負 $\Rightarrow$ $m_{BC} = -m_{CD}$

(4) 若 $m_{AB} \times m_{BC} = -1$, 表 $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ 互相垂直

$\Rightarrow$ 但 $2^2 + 4^2 \neq 5^2$ $\therefore m_{AB} \times m_{BC} \neq -1$

(5) $m_{CD} > m_{AB} > 0$ 且 $m_{DA} = -m_{AB}$ $\Rightarrow$ $m_{CD} + m_{DA} > 0$

(2)(3)(5)

8. 三平面相交情形有8種，解分別為 $\begin{cases} ① 無解 \\ ② 無限多解 \\ ③ 一解 \end{cases}$

∵ 已經知道交於2點 ⇒ 無限多解

又三平面互異且無限多解 ⇒ 三平面交一線

∵ 此交線通過 $(-1,2,0)$ 及 $(3,0,2)$ ⇒ $\vec{L} \parallel (4,-2,2) \parallel (2,-1,1)$
(L)

L 可表成 $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z}{1}$

將每個選項代入 L，發現只有 (2) 符合

(2) #

9. 已知 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$，此時

(1) $\sin\theta$ 遞增，$\cos\theta$ 遞減 且 $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$ ∴ $\sin\theta < \cos\theta$

(2) $\tan 45^\circ = 1$，$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$，當 θ 很接近 45° 時 $\tan\theta > \frac{\sqrt{2}}{2} > \sin\theta$

(3) $\tan 45^\circ = 1$，$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$，當 θ 很接近 45° 時，$\tan\theta > \cos\theta$

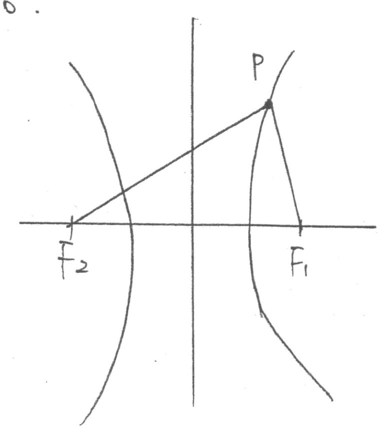
(4) 當 $\theta = 22.5^\circ$ 時，$\sin 2\theta = \cos 2\theta$

(5) $\frac{1}{2}\tan\theta = \frac{1}{2} \times \dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}} = \dfrac{\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}} < \tan\frac{\theta}{2}$ (分母在 0, 1 之間)

$\left(\begin{array}{l} ∵ \tan 45^\circ = 1 \text{ 且 } \tan 0 = 0，\text{又 } 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{4} \\ ∴ 0 < \tan^2\frac{\theta}{2} < 1 \Rightarrow 0 < 1 - \tan^2\frac{\theta}{2} < 1 \end{array} \right)$

(1)(5) #

10.



$\overline{F_1F_2} = 2c = 10$

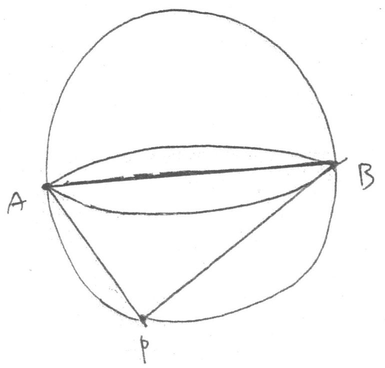
双曲線定義 $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a = 6$

∵ 等腰 ∴ $\overline{PF_2} = \overline{F_1F_2} = 10$ ⇒ $\overline{PF_1} = 4$ or 16

∴ $\triangle PF_1F_2$ 之周長為 24 or 36

(2)(5) #

11.



若 P 在球上 ⇒ $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=\overline{AB}^2=100$

[法一] $(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2)(1^2+1^2)\geq(\overline{PA}+\overline{PB})^2$

⇒ $\overline{PA}+\overline{PB}\leq 10\sqrt{2}=14.14\cdots$

[法二] P在正中間時，$\overline{PA}+\overline{PB}$ 最大 $=10\sqrt{2}$.

(即 $\overline{PA}=\overline{PB}$)

⇒ $\overline{PA}+\overline{PB}\leq 10\sqrt{2}=14.14\cdots$

∵ $\overline{PA}+\overline{PB}=14$

∴ 可能在球上、球外、球內

(3)(4)(5) 皆對.

(1) 若 P 在 $\overline{AB}$ 上 ⇒ $\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{AB}=10$ 不可能

(2) P 可以在 $\overleftrightarrow{AB}$ 上 但由(1)知 P 不在 $\overline{AB}$ 上

(2)(3)(4)(5)#

填充題

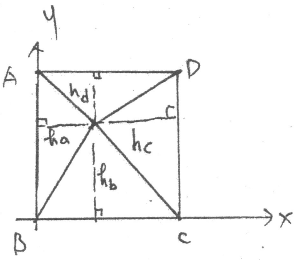
A.

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & 0 & -1 & 4 & & \\
\hline
1\ 1\ 2 & 1 & 1 & 1 & p & 2 & q \\
 & 1 & 1 & 2 & & & \\
\hline
 & & -1 & p & 2 & & \\
 & & -1 & -1 & -2 & & \\
\hline
 & & & p+1 & 4 & q & \\
 & & & 4 & 4 & 8 & \\
\hline
 & & & & & 0 &
\end{array}
$$

∴ $\begin{cases} p+1=4 \\ q=8 \end{cases}$ ⇒ $\begin{cases} p=3 \\ q=8 \end{cases}$

3；8#

B.



∵ △PDA：△PBC＝1：2 ⇒ $h_d:h_b=1:2$

∵ △PAB：△PCD＝2：3 ⇒ $h_a:h_c=2:3$

∴ P點之 y 坐標 $\frac{2}{3}$；x 坐標 $\frac{2}{5}$

$(\frac{2}{5},\frac{2}{3})$#

C. 設向前跳 x 次 ⇒ 向後跳 6−x 次

$x+6-x=4$ ⇒ $x=5$

∴ 向前5次，向後1次，即 →→→→→←之個排列 $\frac{6!}{5!1!}=6$

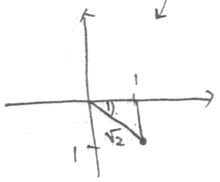
6#

D. $1+z+\cdots+z^{9}=\dfrac{1(1-z^{10})}{1-z}=\dfrac{1-(1-i)^{10}}{1-(1-i)}$

※看到複數很多次方 ⇒ 化極式，利用棣美弗公式展開

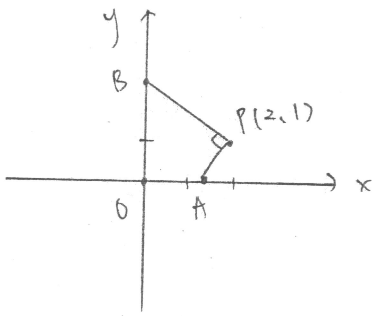
$(1-i)^{10}=\left(\sqrt{2}\,[\cos(-45^\circ)+i\sin(-45^\circ)]\right)^{10}=32[\cos(-450^\circ)+i\sin(-450^\circ)]$

$=32(-i)=-32i$



原式 $=\dfrac{1+32i}{i}=-i+32$　　$\therefore\ a=32,\ b=-1$　　32; −1 #

E. ∵ A在x軸上，設 $A(a,0)$
B在y軸上，設 $B(0,b)$



∵ $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$

$\therefore (2-a,1)\cdot(2,1-b)=0$

$\Rightarrow 4-2a+1-b=0\Rightarrow 2a+b=5$

求 $\triangle OAB$ 面積 $=\frac{1}{2}ab$ 最大

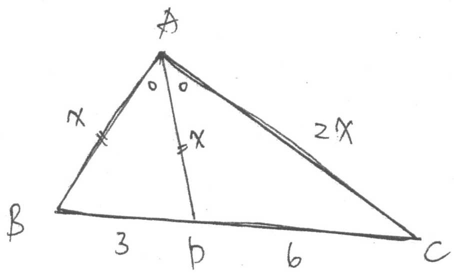
$\Rightarrow \frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}a(5-2a)$

$=-a^2+\frac{5}{2}a$

$=-(a-\frac{5}{4})^2+\frac{25}{16}$

∴ 最大面積 $\frac{25}{16}$　　$\frac{25}{16}$ #

F.



設 $\overline{AB}=\overline{AD}=x$

∵ $\overline{AD}$ 為角平分線

$\therefore \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}}\Rightarrow \overline{AC}=2x$

$\cos B=\dfrac{x^2+3^2-x^2}{\cancel{2}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{3}}=\dfrac{x^2+9^2-(2x)^2}{\cancel{2}\cdot \cancel{9}_{3}\cdot x}$

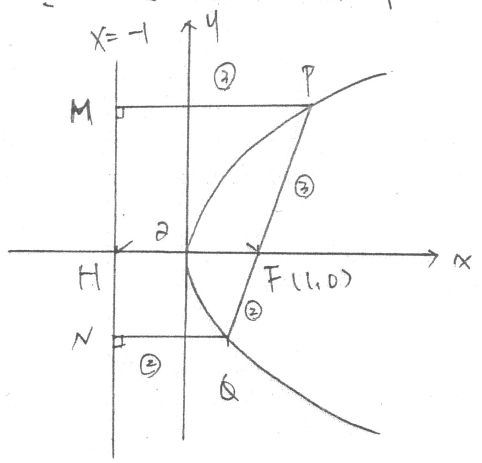
($\triangle ABD$)　　($\triangle ABC$)

$\Rightarrow 3(9)=81-3x^2\Rightarrow x^2=18\Rightarrow x=3\sqrt{2}$ (取正)

$$\cos\angle BAD=\frac{(3\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2-3^2}{2\cdot 3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$$

$\frac{3}{4}$ #

G. ※看到圓錐曲線常要用定義



準線

$\overline{PF}=\overline{PM}$, $\overline{FQ}=\overline{QN}$

$\therefore$ $\overline{PM}:\overline{QN}=3:2$ 且 $\overline{MH}:\overline{HN}=3:2$

設 $\overline{PM}=3t$, $\overline{PN}=2t$

$$\overline{FH}=\frac{3\times\overline{QN}+2\times\overline{PM}}{3+2}=\frac{12t}{5}=2\Rightarrow t=\frac{5}{6}$$

$\therefore$ $\overline{PM}=\frac{5}{2}\Rightarrow$ P之x坐標 $\frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}$ #

H.

$$\begin{aligned}3^{18}&=1\cdot 3^{18}\\&=3\cdot 3^{17}\\&=9\cdot 3^{16}\\&=27\cdot 3^{15}\end{aligned}$$

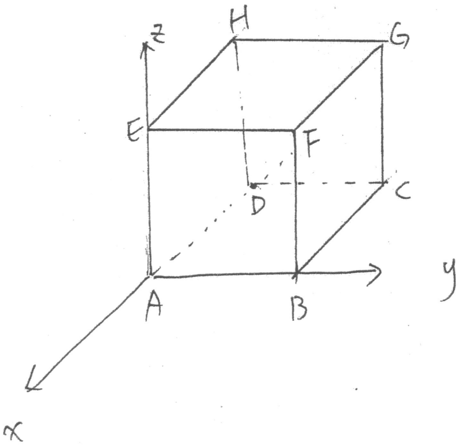
在此之間 $\Rightarrow 15<\ \ <16$

$\Rightarrow k=15$

15 #

I、

※此類型可以坐標法，即把圖形坐標化後再解會變得容易許多.



$A(0,0,0)$. $\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$

$\overrightarrow{AD}=(-1,0,0)$

$\overrightarrow{AE}=(0,0,1)$

$\overrightarrow{AP}=(\frac{-1}{2},\frac{3}{4},\frac{2}{3})$ $\therefore$ P點坐標 $(\frac{-1}{2},\frac{3}{4},\frac{2}{3})$

$\overleftrightarrow{AB}:(0,t,0)$ $t\in\mathbb{R}$

$$P到\overleftrightarrow{AB}距離=\sqrt{(\tfrac{1}{2})^2+(t-\tfrac{3}{4})^2+(\tfrac{-2}{3})^2}$$
$$=\sqrt{(t-\tfrac{3}{4})^2+\tfrac{1}{4}+\tfrac{4}{9}}=\sqrt{(t-\tfrac{3}{4})^2+\tfrac{25}{36}}$$

$\therefore$ $\sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{5}{6}$

$\frac{5}{6}$ #