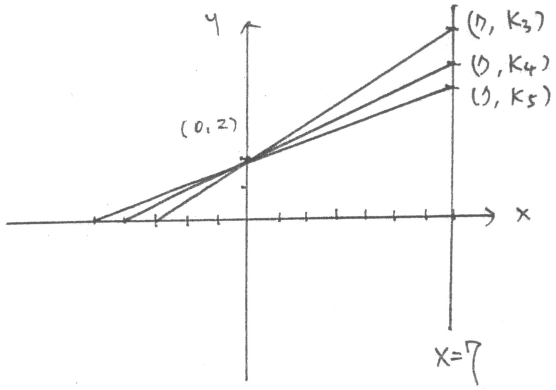
1.

$$f(5)-f(-5)=\left[a\cdot 5^6-b\cdot 5^4+3\cdot 5-\sqrt{2}\right]-\left[a\cdot(-5)^6-b(-5)^4+3(-5)-\sqrt{2}\right]$$

$$=30$$

(4) #

2. 設通過 $(-n,0)$ 與 $(0,2)$ 的直線與 $x=7$ 交於 $(7,\ k_n)$



題目所求即為有多少個 k_n 是正整數

我們不難發現 $k_1>k_2>k_3>\cdots>k_n>\cdots>2$

$\Rightarrow k_1=\frac{2}{1}\times 7+2$

$k_2=\frac{2}{2}\times 7+2$

$k_3=\frac{2}{3}\times 7+2$

$k_4=\frac{2}{4}\times 7+2$

$\vdots$

$k_n=\frac{2}{n}\times 7+2=\frac{14}{n}+2$

$\therefore k_1=16,\ k_2=9,\ k_7=4,\ k_{14}=3$ 為整數，其餘皆不可能是整數

(2) #

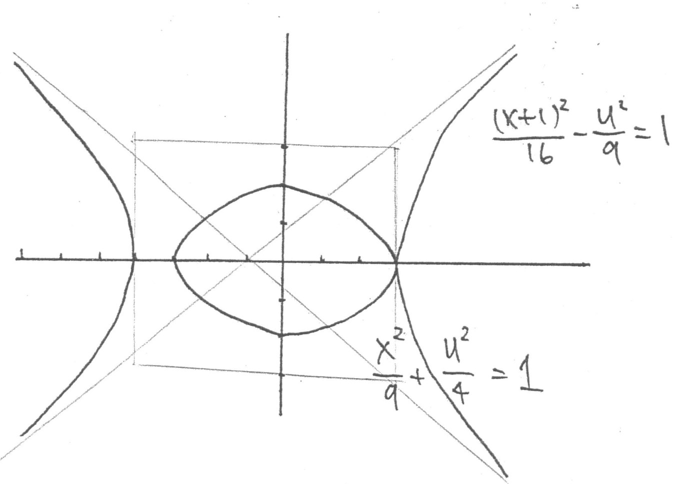
3.

$f(t)=-t^2+10t+11=-(t^2-10t)+11=-(t-5)^2+36$，其中 $1\le t\le 10$

$\therefore$ 最大值 $=36$，最小值 11 $\Rightarrow$ 最大溫差 25

(4) #

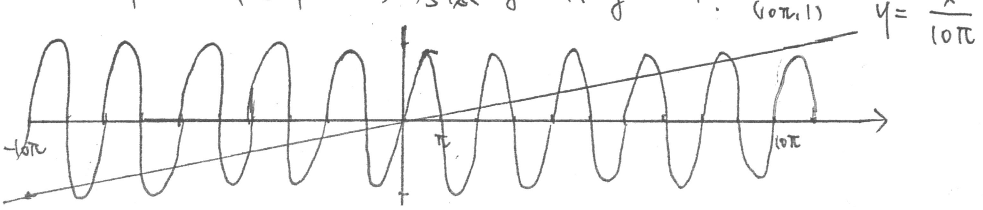
4.



$\Rightarrow$ 只有一個交點

(1) #

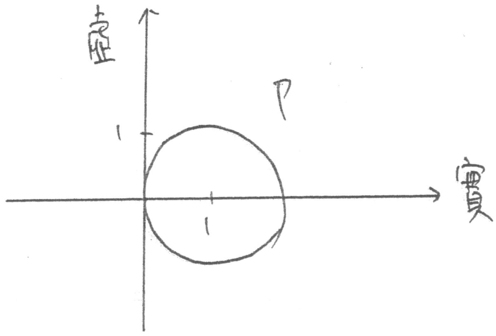
5. $\because |\sin x|\le 1 \Rightarrow$ 考慮 $y=1,\ y=-1$.



$\Rightarrow$ 19個交點.

(3) #

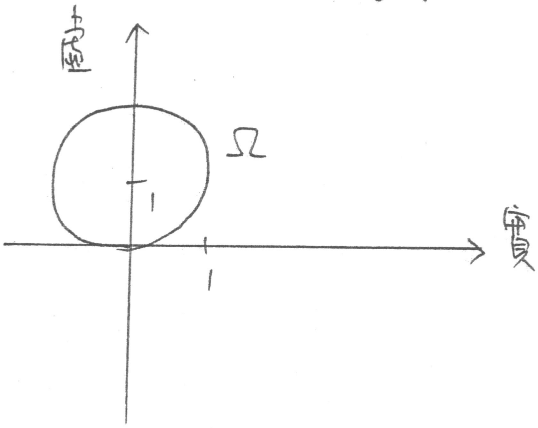
6. $|z-1|$ 表示 z 到 $1+0i$ 的距離，所以 $|z-1|=1$ 畫在複數平面為



又 $\Omega=\{w \mid w=iz,\ z\in P\}$，所以 $w=(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)\cdot z$

極式相乘⇒角度相加， ∴ w 可以想成 z 旋轉 90°

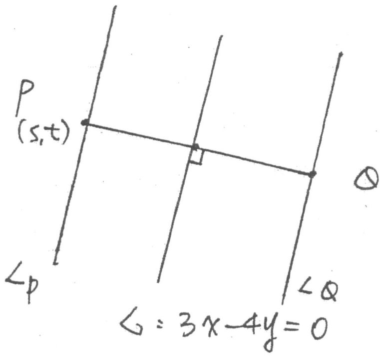
題目 $z\in P$ ⇒ Ω 表示 P 旋轉 90°



⇒ Ω 表以 $(0,1)$ 為圓心，半徑為 1 的圓.

(1)(3)(5) #

7.



(1) $\vec{L}=(4,3)$，$\vec{n_L}=(3,-4)$ L的法向量

∵ $\vec{PQ}\perp L$，i.e. $\vec{PQ}\parallel\vec{n_L}=(3,-4)$

(2) P到L的距離

$\overline{PQ}=2d(P,L)=2\times\dfrac{|3s-4t|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|6s-8t|}{5}$

(3) 設 Q 為 (t,s)

Q 可想成「P 對直線 L 的對稱點」⇒ $\vec{QP}\perp L$ 且 $d(P,L)=d(Q,L)$

① $\vec{QP}=(s-t,\ t-s)\parallel(1,-1)$ ⇒ $\vec{QP}\cdot\vec{L}=1\neq0$ ∴ $\vec{QP}\not\perp L$

$\vec{L}=(4,3)$

∴ (t,s) 不是 Q

(4) 設平行 L 過 P 之直線為 L_P ⇒ L_P 方程式為 $3x-4y\overset{(s,t)}{=\!=}3s-4t$ k

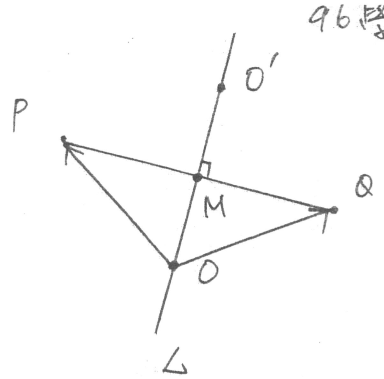
∵ $L_P\parallel L\parallel L_Q$ 且 L_P, L 的距離等於 L_Q, L 的距離 ⇒ $L_Q: 3x-4y=-3s+4t$ −k

將點 $(-s,-t)$ 代回 L_Q 發現滿足方程式 所以 $(-s,-t)$ 在 L_Q 上

(5) 請察覺 O(0,0) 在直線 L 上

設 M 為 $\overline{PQ}$ 中點 (且 O' 使得 $\overline{O'O}$ 之中點為 M)

$\Rightarrow \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OM}\left(=\overrightarrow{OO'}\right) \parallel L$



$\therefore \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ} \perp \overrightarrow{PQ}$

$\therefore \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ 與 $\overrightarrow{PQ}$ 內積為 0

(1)(2)(4)(5) #

8. 列運算即解聯立方程組，題目可想成哪些方程組有相同的解

題目：$\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ y+z=2 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow y=1 \Rightarrow x=2$，恰有一組解 (2,1,1)

(1) $\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ y+z=2 \\ 2y+3z=5 \end{cases} \Rightarrow$ 恰有一解 (2,1,1)

(2) $\begin{cases} -x+3y-z=0 \\ -x+y+z=0 \\ 3x+y-7z=0 \end{cases} \Rightarrow$ 至少有一解 (0,0,0) $\Rightarrow$ 不合

(3) $\begin{cases} x+y+2z=5 \quad —① \\ x-y+z=2 \\ x+y+2z=5 \quad —③ \end{cases} \Rightarrow$ 有二重合平面 $\Rightarrow$ 無限多解 $\Rightarrow$ 不合
(與一平面相交)

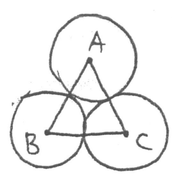
(4) $\begin{cases} 2x+y+3z=6 \\ -x+y+z=0 \quad —② \\ -2x+2y+2z=1 \quad —③ \end{cases} \Rightarrow$ 有二平行平面 $\Rightarrow$ 無解 $\Rightarrow$ 不合

(5) $\begin{cases} x+3y+2z=7 \\ y+z=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow$ 恰有一解 (2,1,1)

(1)(5) #

9.
(1) ∵ A、B、C 三球球心 z 坐標均為 1

∴ A、B、C 所在平面平行 xy 平面
(即 z=1) (即 z=0)



從下往上看

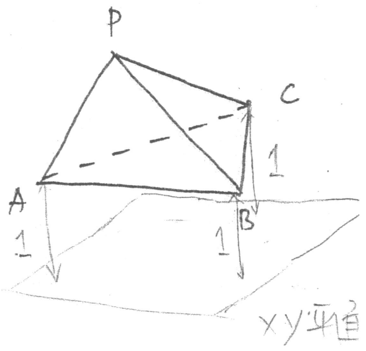
(2) ∵ 球均相切 ⇒ 連心距 = 半徑和

∴ $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=2 \Rightarrow \triangle ABC$ 為正三角形

(3) ∵ P、A、B 三球均相切，

同(2) ⇒ $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{AB}=2$，

更進一步可以得知 PABC 為正四面體，邊長為 2



(4) P 到 $\overleftrightarrow{AB}$ 的距離即正三角形 PAB 的高 $=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$

(5) 從(1)知三角形 ABC 與 xy 平面平行且距離 $=1$

∴ P 到 xy 平面的距離 = P 到 △ABC 的距離 $+1$

P 到 △ABC 的距離 = 正四面體 PABC 的高 $=\frac{\sqrt{6}}{3}\times 2=\frac{2}{3}\sqrt{6}$

∴ P 到 xy 平面的距離 $=1+\frac{2}{3}\sqrt{6}$

(1)(2)(4) #

10. 看到 $y=a^x$，$y=\log_a x$ ⇒ 此二圖形對稱於 $y=x$

(1) $f(3)=6 \Rightarrow a^3=6$，則 $g(36)=\log_a 36=\log_{a^3}(36)^3=\log_6 6^6=6$

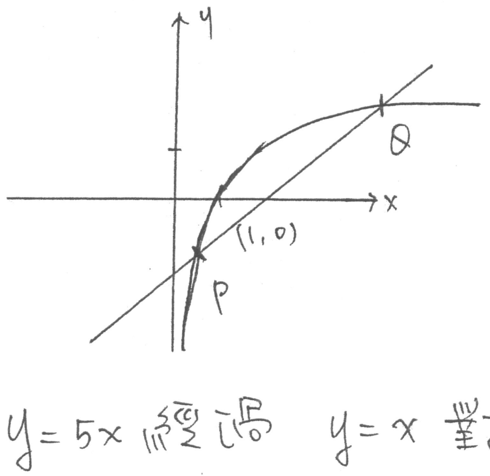
(2) $\frac{f(238)}{f(219)}=\frac{a^{238}}{a^{219}}=a^{19}$，$\frac{f(38)}{f(19)}=\frac{a^{38}}{a^{19}}=a^{19} \Rightarrow \frac{f(238)}{f(219)}=\frac{f(38)}{f(19)}$

(3) $g(238)-g(219)=\log_a 238-\log_a 219=\log_a\frac{238}{219}$

$g(38)-g(19)=\log_a 38-\log_a 19=\log_a\frac{38}{19}$

$\Rightarrow g(238)-g(219)\neq g(38)-g(19)$

(4) $y=\log_a x$，且 $a>1$



⇒ 畫圖可得 $m_{PQ}>0$.

(5) $y=5x$ 經過 $y=x$ 對稱後圖形為 $x=5y$ (即 $y=\frac{1}{5}x$)

∴ 原圖形 $y=a^x$ 和 $y=5x$ (有 2 個交點)

$\xrightarrow{\text{經過 } y=x \text{ 對稱}}$ 新圖形 $y=\log_a x$ 和 $y=\frac{1}{5}x$ (仍有 2 個交點)

(1)(2)(4)(5)

11. 不難看出 $x-1 \mid f(x)-x$ $\Rightarrow (x-1)(x-2)(x-5) \mid f(x)-x$

$x-2 \mid f(x)-x$

$x-5 \mid f(x)-x$

$\because f(x)$ 是三次多項式 $\therefore f(x)-x$ 也是三次多項式

可以設 $f(x)-x = k(x-1)(x-2)(x-5)$，其中 $k \neq 0$.

$\Rightarrow f(x) = k(x-1)(x-2)(x-5)+x$，又已知 $f(x)$ 最高項次數為 1.

$\therefore k=1$，$\Rightarrow f(x) = (x-1)(x-2)(x-5)+x$

$f(-\infty) = -\infty$

$f(0) = -10$

$f(1) = 1$

$f(2) = 2$

$f(3) = -1$

$f(4) = -2$

$f(5) = 5$

$f(\infty) = \infty$

$\therefore$ 三解分別落於 $(0,1)$, $(2,3)$, $(4,5)$

(2)(4) ※

A、

$\log_x 4 - \log_2 x = 1 \Rightarrow \log_x 2^2 - \log_2 x = 1 \Rightarrow 2\log_x 2 - \log_2 x = 1$

令 $t = \log_2 x \Rightarrow \log_x 2 = \frac{1}{t}$

$\therefore 2\frac{1}{t} - t = 1 \Rightarrow 2 - t^2 = t \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t = -2$ or 1

$\Rightarrow \log_2 x = -2$ or $1 \Rightarrow x = 2^{-2}$ or $2^1 = \frac{1}{4}$ or 2.

$\because 0 < x < 1$ $\therefore x = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}$ ※

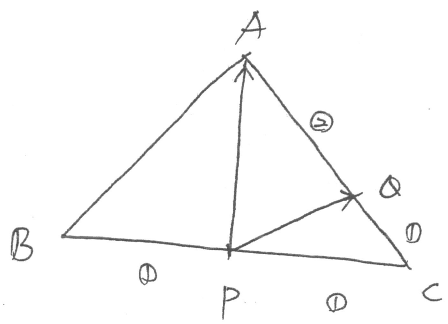
B、看 $\triangle PAC$，由分點公式知

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PA}$

$\Rightarrow (1,5) = \frac{2}{3}\overrightarrow{PC} + \frac{1}{3}(4,3)$

$\Rightarrow \frac{2}{3}\overrightarrow{PC} = \left(\frac{-1}{3}, 4\right) \Rightarrow \overrightarrow{PC} = \left(\frac{-1}{2}, 6\right)$

$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{PC} = (-1, 12)$



$(-1, 12)$ ※

C、 15人平均76分 ⇒ 15人總分 $76\times15=1140$分

剔除92、45、55後，12人總分 $=1140-92-45-55$ ⇒ 12人平均 $\frac{948}{12}=79$ 分

$=948$ 分

$\underline{79}$ #

D. [法一] 1 ‧‧‧‧ 10 11 12 第13排 14 15 16 ‧‧‧ 25

58 60 62 64 66 68 70

128

128

128

⋮

128

$128\times12+64=1600$

[法二] 設第1排 a_1，第2排 a_2，‧‧‧，第25排 a_{25}（個位置）

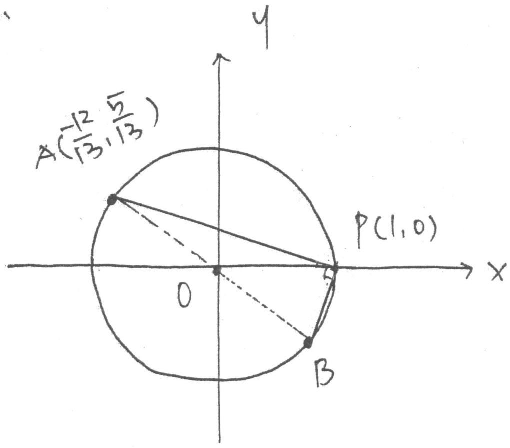
⇒ $\langle a_n\rangle$ 是公差為2的等差數列且 $a_{13}=64$

⇒ $a_1=a_{13}+(1-13)\times2=64-24=40$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{25}=\dfrac{25\times(2\cdot40+24\cdot2)}{2}=1600$

$\underline{1600}$ #

E、



$\because \angle APB=90^\circ$

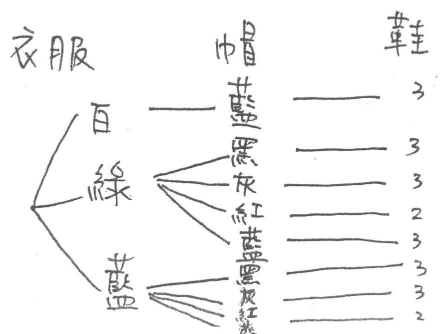
$\therefore \overline{AB}$ 為直徑 ⇒ $\overline{AB}$ 通過O點

⇒ A、B的中點是O點

⇒ $B\left(\frac{12}{13},\frac{-5}{13}\right)$

$\underline{\left(\frac{12}{13},\frac{-5}{13}\right)}$ #

F、 ∵ 白衣配藍帽限制很強 ⇒ 討論樹狀圖時先行考慮衣服



⇒ $7\times3+2\times2=25$

$\underline{25}$ #

G.[法一] 甲案摸 k 號球 k 元
乙案摸 k 號球 $(11-k)$ 元 $>$ 同時執行甲案、乙案，摸 k 號球 11 元

$\therefore$ 甲案、乙案同時執行，摸一球期望值 11 元

又甲案，摸一球期望值 $\frac{67}{14}$ 元

$\therefore$ 乙案，摸一球期望值 $11-\frac{67}{14}=\frac{87}{14}$ 元

[法二] 設 k 號球被摸出機率 p_k，那麼 $p_1+p_2+\cdots+p_{10}=1$ $\left(\sum_{k=1}^{10} p_k=1\right)$
$(k=1\sim10)$

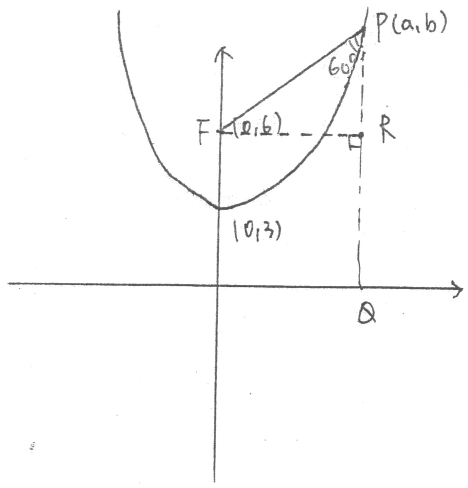
甲案摸一球期望值 $=\sum_{k=1}^{10} k\cdot p_k=\frac{67}{14}$

乙案摸一球期望值 $=\sum_{k=1}^{10}(11-k)\cdot p_k=\sum_{k=1}^{10} 11p_k-\sum_{k=1}^{10} k\cdot p_k$

$=11\sum_{k=1}^{10} p_k-\frac{67}{14}=11\times1-\frac{67}{14}=\frac{87}{14}$

$\frac{87}{14}$ #

H.



設 R 為 F 投影到 $\overline{PQ}$ 之點

$\Rightarrow \overline{FR}=a$，$\overline{PR}=b-6$

$\therefore \frac{a}{b-6}=\sqrt{3} \Rightarrow a=\sqrt{3}(b-6)$

又此拋物線方程式為

$x^2=4\times3\times(y-3)$

(a,b) 再拋物線上

$\Rightarrow \left[\sqrt{3}(b-6)\right]^2=12(b-3)$

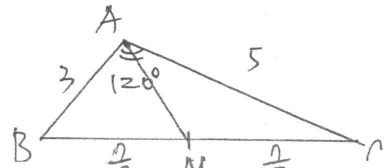
$\Rightarrow \cancel{3}(b^2-12b+36)=\overset{4}{\cancel{12}}(b-3)$

$\Rightarrow b^2-16b+48=0 \Rightarrow b=4$ or 12

$\because b>6 \Rightarrow b=12$

12 #

I、



$\overline{BC}=\sqrt{3^2+5^2-2\times3\times5\times\cos120^\circ}$

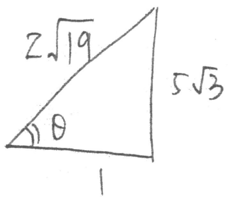
$=7$

設 $\overline{AM} = x$

$$\cos B = \frac{3^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - x^2}{2 \times 3 \times \frac{7}{2}} = \frac{3^2 + 7^2 - 5^2}{2 \times 3 \times 7} \Rightarrow 2\left(9 + \frac{49}{4} - x^2\right) = 33$$

（看 $\triangle ABM$）　　（看 $\triangle ABC$）　$\Rightarrow x^2 = \frac{19}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{19}}{2}$

$$\cos \angle BAM = \frac{3^2 + \left(\frac{\sqrt{19}}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2}{2 \times 3 \times \frac{\sqrt{19}}{2}} = \frac{9 + \frac{19}{4} - \frac{49}{4}}{3\sqrt{19}} = \frac{1}{2\sqrt{19}}$$



$\Rightarrow \tan \angle BAM = 5\sqrt{3}$

$\underline{5\sqrt{3}}$ ※