1.
$$\begin{cases} a>1: & x>y \Leftrightarrow a^x > a^y \\ 0<a<1: & x>y \Leftrightarrow a^x < a^y \end{cases}$$

$$x^2+\frac{2}{3} \geq \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 27^{x^2+\frac{2}{3}} \geq 27^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$$

(3) #

2.
$$ERA = \frac{E}{n} \times 9$$

90局 $\Rightarrow 3.2 = \frac{E}{90} \times 9 \Rightarrow E = 32$

再6局 $\Rightarrow ERA = \frac{32}{96} \times 9 = \frac{1}{3} \times 9 = 3$

(2) #

3.
相同時間，甲，乙所走的距離比 $\Rightarrow$ 甲$_{走}$: 乙$_{走}$ $= 30 \times 1 : 50 \times 2$
$= 3 : 10$

現在甲走 45公尺 $\Rightarrow$ 乙走 $45 \times \frac{10}{3} = 150$ 公尺

(4) #

4.
$\boxed{A}\ \boxed{\ }-\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{4}$

$\uparrow$ $\uparrow$

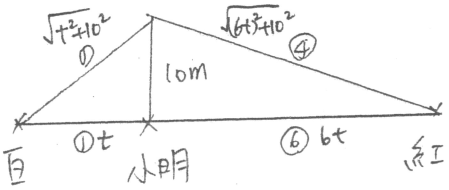
1　25
(不能0)

$(10 \times 10 \times 10 - 10 \times 1 \times 1)$
(任意 − 後兩碼均為4)
$\downarrow$
連三碼是4.

$\Rightarrow$ 共 $1 \times 25 \times (1000-10) = 25 \times 990$

(4) #

5、



設小明與白旗距離 t 公尺

$\Rightarrow 4\sqrt{t^2+10^2}=\sqrt{(6t)^2+10^2}$

$\Rightarrow 16(t^2+100)=36t^2+100$

$\Rightarrow 16t^2+1600=36t^2+100$

$\Rightarrow 20t^2=1500$

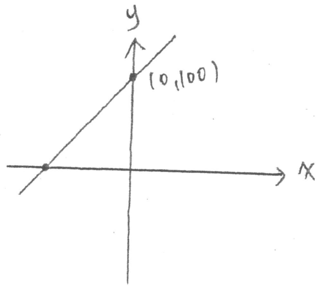
$\Rightarrow t^2=75 \quad \Rightarrow t=5\sqrt{3}$

紅、白兩旗距 $= 7t = 35\sqrt{3} \approx 60.62$

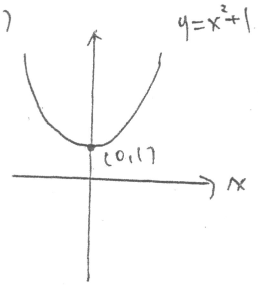
(1) #

6.

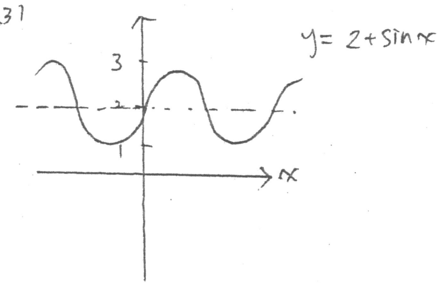
(1)



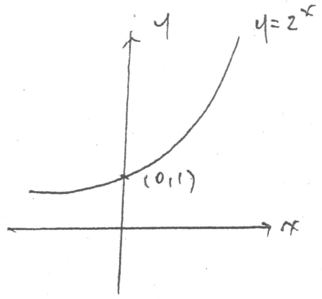
(2)



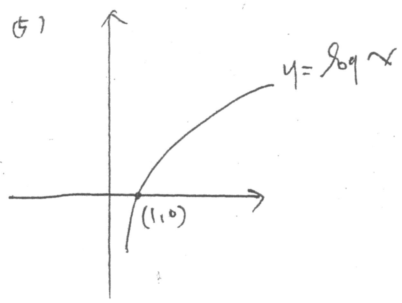
(3)



(4)



(5)



(2)(3)(4) #

7、

(1) 有可能 80 人，落在 2 班. (X)

(2) 有可能 80 人都是女生 (X)

(3) 小文抽中機率 $= \frac{80}{800} = \frac{1}{10}$ (X)

小美抽中機率 $= \frac{80}{800} = \frac{1}{10}$

(4) 甲乙同時抽中 $= \frac{80}{800} \times \frac{79}{799}$ (O)

甲丙同時抽中 $= \frac{80}{800} \times \frac{79}{799}$

(5) AB同時抽中 $= \underset{\shortparallel}{\frac{80}{800}} \times \underset{\wedge}{\frac{79}{799}} < \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$ (O)

(4)(5) #

8、

(1) a_1, a_2, a_3 成等差，可設三數為 $a, a+d, a+2d$

$\because a_1 < a_2 \Rightarrow d > 0$
$a_2 > a_3 \Rightarrow d < 0$ ($\rightarrow\leftarrow$) (×)

(2) Ex: $b_1 = -1$, $b_2 = 2$, $b_3 = -4$ (○)

$\Rightarrow -1, 2, -4$ 成等比 且 $-1 < 2$, $2 > -4$

(3) 反例: a_1, a_2, a_3 分別為 $-2, 1, 4$ 成等差 (×)

$\Rightarrow a_1 + a_2 < 0$，但 $a_2 + a_3 > 0$

(4)

b_1, b_2, b_3 成等比，可設三數 b, br, br^2 (○)

$\because b_1 \cdot b_2 < 0 \Rightarrow b \cdot br < 0 \Rightarrow r < 0$

$\therefore b_2 \cdot b_3 = (br)(br^2) = \underbrace{b^2 r^2}_{\vee 0} \cdot \underbrace{r}_{\wedge 0} < 0$

(5) 反例: b_1, b_2, b_3 分別為 4, 6, 9 成等比且皆為正整數 (×)

$\Rightarrow$ 但 $4 \nmid 6$.

(2)(4) #

9.

$n_A \times n_B = 10^{10} \Rightarrow 1 \le n_A \le 10^{10}$

(1) $\log 1 \le \log n_A \le \log 10^{10} \Rightarrow 0 \le P_A \le 10$ (×)

(2) $P_A = 5 \Rightarrow \log n_A = 5 \Rightarrow n_A = 10^5 \Rightarrow n_B = \dfrac{10^{10}}{10^5} = 10^5$

$\therefore n_A = n_B$ (○)

(3)

$P_A = 4 \Rightarrow \log n_A = 4 \Rightarrow n_A = 10^4$
$P_{A'} = 8 \Rightarrow \log n_{A'} = 8 \Rightarrow n_{A'} = 10^8$
$\Rightarrow \dfrac{n_{A'}}{n_A} = \dfrac{10^8}{10^4} = 10^4 \ne 2$ (×)

(4) 設昨天 $P_A = k$，則今天 $P_{A'} = k+1$

$\Rightarrow k = \log n_A \Rightarrow n_A = 10^k$
$k+1 = \log n_{A'} \Rightarrow n_{A'} = 10^{k+1}$
$\Rightarrow 10^{k+1} - 10^k \underset{(不一定)}{\ne} 10$ (×)

(5) $n_B = 5\times10^4 \Rightarrow n_A = \frac{10^{10}}{5\times10^4} = 2\times10^5$

$p_A = \log n_A = \log(2\times10^5) = 5 + \log 2 = 5.3010$ (O)

(2)(5)#

10. 求公因式 ⇒ 一個有未知數，一個沒有未知數.

⇒ 將沒有未知數者因式分解.

$g(x) = x^3 + x^2 - 2 = (x-1)\underline{(x^2-2x+2)}$

實數不可再分解 ($D<0$)

∵ 有次數大於 0 之公因式 ⇒ 最高公因式可能 ① $x-1$

② x^2-2x+2

③ $(x-1)(x^2-2x+2)$

(1) $g(x)=0$ 的根 ⇒ $x=1$，$\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2} = 1\pm2i$ ⇒ 恰有一實根 (O)

(2) 若最高公因式為 x^2-2x+2 ⇒ $f(x)$ 不一定有實根. (X)

Ex: $f(x) = x^2-2x+2$

(3) $g(x)=0$ 只有一實根 1，∴ $f(x)=0$，$g(x)=0$ 有共同實根 ⇒ 此根為 1 (O)

(4) $f(x)=0$，$g(x)=0$，有共同實根 ⇒ 可能之最高公因式. $x-1$

$(x-1)(x^2-2x+2)$

⇒ 不一定是一次 (X)

(5) $f(x)=0$，$g(x)=0$ 沒有共同實根 ⇒ 最高公因式 $= x^2-2x+2$ ⇒ 二次 (O)

(1)(3)(5)#

11.

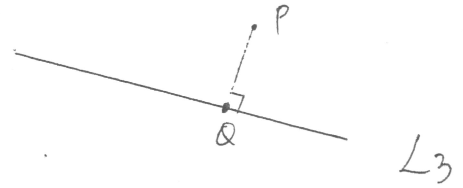
(1) L_1, L_2 均過點 $(1,-3,-4)$ ⇒ L_1, L_2 相交 (O)

(2) $\vec{L_2} = (1,3,4)$ $\vec{L_3} = (1,3,4)$ ⇒ $\vec{L_2} \parallel \vec{L_3}$

又 $(0,-3,-4)$ 不在 L_3 上 $\left(\frac{0}{1} \neq \frac{-3}{3} = \frac{-4}{4}\right)$ ⇒ L_2, L_3 不重合] ⇒ $L_2 \parallel L_3$ (O)

(3) 若 $\overline{PQ}$ 是 P 到 L_3 之最短距離

$\Rightarrow \overline{PQ} \perp L_3$



$\overrightarrow{PQ} = (0,3,4)$

$\overrightarrow{L_3} = (1,3,4)$

$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{L_3} = 0+9+16 = 25 \neq 0$

$\therefore \overrightarrow{PQ} \not\perp \overrightarrow{L_3}$ (X)

(4)

$$\begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z+4}{-3} \Rightarrow -3y-9 = 4z+16 \Rightarrow 3y+4z+25=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 3y+4z=25 \end{cases}$$

兩面式 $\Rightarrow \vec{L} \perp (1,0,0)$

$\vec{L} \perp (0,3,4)$

$$\begin{array}{cccccc} \cancel{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 3 & 4 & 0 & 3 & \cancel{4} \\ \hline & 0 & -4 & 3 & & \end{array}$$

$\Rightarrow \vec{L} \parallel (0,-4,3)$

$\vec{L} \cdot \vec{L_1} = (0,-4,3) \cdot (1,6,8) = -24+24 = 0 \Rightarrow \vec{L} \perp \vec{L_1}$ (O)

$\vec{L} \cdot \vec{L_2} = (0,-4,3) \cdot (1,3,4) = -12+12 = 0 \Rightarrow \vec{L} \perp \vec{L_2}$

(5)

L_1 與 L_2 相交且 L_2 與 L_3 平行

$\Rightarrow$ 看 L_1、L_3 的關係．($\vec{L_1} \nparallel \vec{L_3}$)

看 L_1、L_3 是否相交，設 L_1、L_3 之交點 P

$\because$ P 在 L_1 上 $\Rightarrow$ 設 $P(t, -3+6t, -4+8t)$

$\because$ P 在 L_2 上 $\Rightarrow$ 設 $P(s, 3s, 4t)$

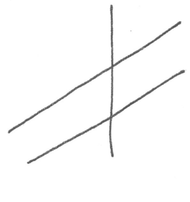
$$\Rightarrow \begin{cases} t = s & \text{——①} \\ -3+6t = 3s & \text{——②} \\ -4+8t = 4s & \text{——③} \end{cases}$$

① 代入 ② $\Rightarrow -3+6t = 3t \Rightarrow t=1 \Rightarrow s=1$

$t=1, s=1$ 代回 ③ 檢驗 $-4+8=4$．(合)

即 L_1 與 L_3 交於 $P(1,3,4)$

$\therefore$



$\Rightarrow L_1$、L_2、L_3 共平面 (O)

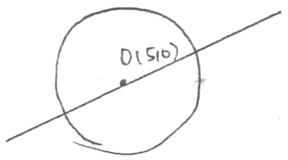
(1)(2)(4)(5)#

12、 $x^2+y^2-10x+9=0$

$\Rightarrow (x-5)^2+y^2=-9+25 \Rightarrow (x-5)^2+y^2=4^2$

(1) 圓心 $(5,0)$ (o)

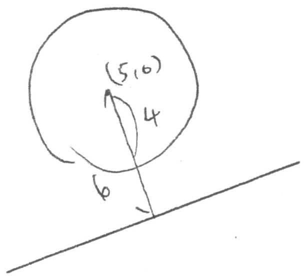
(2) $3x+4y-15=0$.



$d(O,L)=\frac{|15+0-15|}{\sqrt{3^2+4^2}}=0$

∴ 最遠距離 = 半徑 = 4 (o)

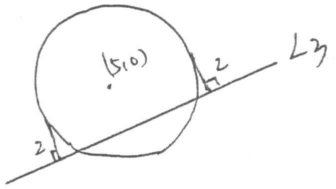
(3)



$d(O,L_1)=\frac{|15+0+15|}{\sqrt{3^2+4^2}}=6.$

⇒ 不相切 (相離) (×)

(4)



$d(O,L_2)=\frac{|15+0|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$

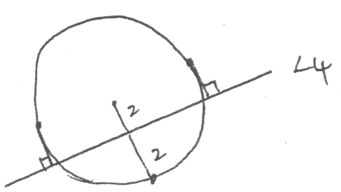
⇒ L_3 右下半部最遠距離 $=4-3=1$

L_3 左上半部最遠距離 $=4+3=7$

⇒ 有2個點距離2 (o)

對稱

(5)



$d(O,L_3)=\frac{|15+0-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

⇒ L_4 右下半部有1個距離2

L_4 左上半部有2個距離2

⇒ 共3個點距離2 (×)

(1)(2)(4) #

A、設 $D(x,y,z)$

$\overrightarrow{DA}=(-1-x,\ 6-y,\ -z)$

$\overrightarrow{DB}=(3-x,\ -1-y,\ -2-z)$

$\overrightarrow{DC}=(4-x,\ 4-y,\ 5-z)$

$3\overrightarrow{DA}-4\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

$\Rightarrow 3(-1-x,6-y,-z)-4(3-x,-1-y,-2-z)+2(4-x,4-y,5-z)=(0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3-3x-12+4x+8-2x=0 \Rightarrow -x-7=0 \Rightarrow x=-7 \\ 18-3y+4+4y+8-2y=0 \Rightarrow -y+30=0 \Rightarrow y=30 \\ -3z+8+4z+10-2z=0 \Rightarrow -z+18=0 \Rightarrow z=18 \end{cases}$$

$\underline{(-7,30,18)}$ #

B、

A在直線 $3x-y=0$ 上 $\Rightarrow$ 設 $A(t,3t)$

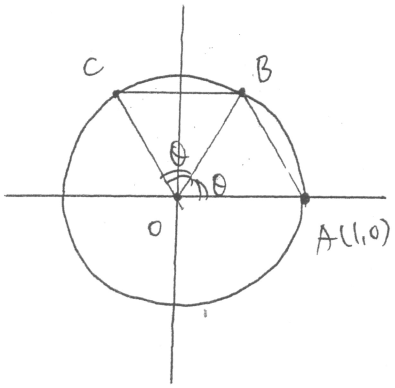
B在x軸上 $\Rightarrow$ 設 $B(b,0)$

A, B中點 $=\frac{A+B}{2}=\left(\frac{t+b}{2},\frac{3t}{2}\right)=\left(\frac{7}{2},6\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{t+b}{2}=\frac{7}{2} & \Rightarrow b=3 \\ \frac{3t}{2}=6 \Rightarrow t=4 \end{cases}$$

$A(4,12)$
$\underline{B(3,0)}$ #

C.



$\because \overline{AB}=\overline{BC}$

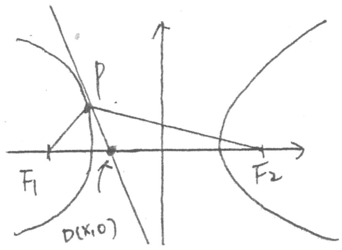
$\Rightarrow \angle AOB=\angle BOC=\theta$

$\because \triangle AOB$ 面積 $=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\sin\theta=\frac{3}{10} \Rightarrow \sin\theta=\frac{3}{5} \Rightarrow \cos\theta=\frac{4}{5}$

$\Rightarrow \triangle AOC$面積 $=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin 2\theta=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{12}{25}$

$\underline{\frac{12}{25}}$ #

D、橢圓、双曲線之光學性質 ⇒ $\angle F_1PF_2$ 之角平分線 與 過 P 之切線有關



双曲線：$\angle F_1PF_2$ 之角平分線即切線.

∵ (−4,1) 在曲線上，求切線 ⇒ 一半公式

$\left(x^2 \to x_0 x \quad x \to \frac{x_0+x}{2} \right.$
$\left. y^2 \to y_0 y \quad y \to \frac{y_0+y}{2} \right)$

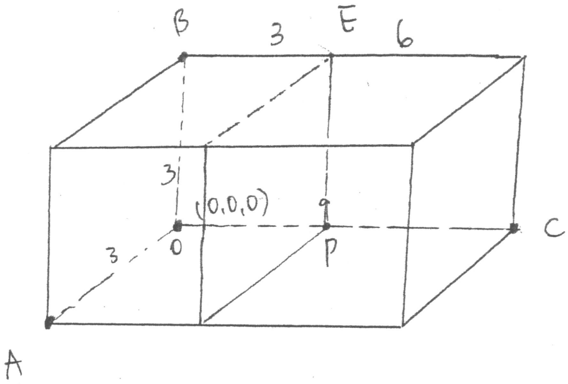
∴ $x^2 \to -4x$, $y^2 \to 1 \cdot y$

$$\frac{x^2}{8} - y^2 = 1 \xrightarrow{\text{一半公式}} \frac{-4x}{8} - y = 1 \Rightarrow -x - 2y = 2$$

$D(x,0) \Rightarrow -x - 0 = 2 \Rightarrow x = -2$

$\underline{-2}$ #

E、



$A(2,2,1) \Rightarrow \overline{OA} = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3$
$B(2,-1,2) \Rightarrow \overline{OB} = \sqrt{2^2+(-1)^2+2^2} = 3$
$C(3,-6,6) \Rightarrow \overline{OC} = \sqrt{3^2+(-6)^2+6^2} = 9$

∵要切出正立方體 ⇒ 切平面 E 之法向量 $\vec{n} \parallel \overrightarrow{OC} = (3,-6,6) \parallel (1,-2,2)$

過點 P，P在 $\overline{OC}$ 上使得 $\overline{OP} = 3$, $\overline{PC} = 6$

$$P = \frac{1 \cdot C + 2 \cdot O}{1+2} = \frac{(3,-6,6)+2(0,0,0)}{3} = (1,-2,2)$$

$$E: x - 2y + 2z \xlongequal{(1,-2,2)} 9$$

$(b,c,d) = \underline{(-2,2,9)}$ #

F、$b^2 = 9a \Rightarrow a = \frac{b^2}{9}$

$a + 2b > 280 \Rightarrow \frac{b^2}{9} + 2b > 280 \Rightarrow b^2 + 18b > 2520 \Rightarrow (b+9)^2 > 2601 = 51^2$

$\Rightarrow b+9 > 51$ or $b+9 < -51 \Rightarrow b > 42$ or $b < -60$ （取正）$\Rightarrow b > 42$

$\because a=\frac{b^2}{9}$ $\therefore$ b愈小，a愈小

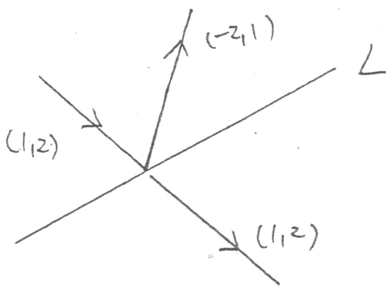
$\Rightarrow b=43 \Rightarrow a=\frac{43^2}{9}$ （不是整數，不合）

$b=44 \Rightarrow a=\frac{44^2}{9}$ （不是整數，不合）

$b=45 \Rightarrow a=\frac{45^2}{9}=225$

225 #

9.



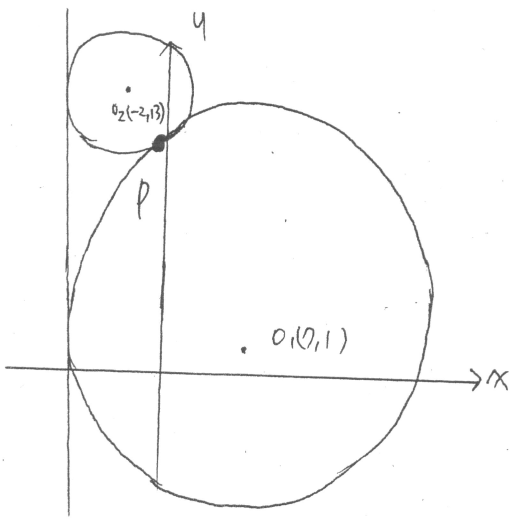
如圖 $\vec{L}$ 為 $(-2,1)$ 和 $(1,2)$ 之角平分線方向.

又 $|(-2,1)|=\sqrt{5}$, $|(1,2)|=\sqrt{5}$

$\therefore \vec{L}=(-2,1)+(1,2)=(-1,3) \parallel (1,-3)$

-3 #

H. 圓錐曲線 ⇒ 常考定義式



O_1 圓心 $(7,1)$ $\Rightarrow$ 連心距 $=\sqrt{9^2+(-12)^2}=15$

O_2 圓心 $(-2,13)$ $=12+3=$ 半徑和.

⇒ 外切，如左圖.

設兩圓切點 P

$\Rightarrow \overline{PO_1}=d(O_1, L)=12$

$\overline{PO_2}=d(O_2, L)=3$

⇒ P 為焦點，L 為準線之拋物線.

$$\overset{①}{\overbrace{O_2(-2,13)\ \ 3\ \ P}}\ \overset{④}{\overbrace{\ \ 12\ \ O_1(7,1)}} \Rightarrow P=\frac{1\cdot O_1+4O_2}{1+4}$$

$\Rightarrow P=\frac{1\cdot(7,1)+4\cdot(-2,13)}{5}=\left(\frac{-1}{5},\frac{53}{5}\right)$

$\left(\frac{-1}{5},\frac{53}{5}\right)$ #