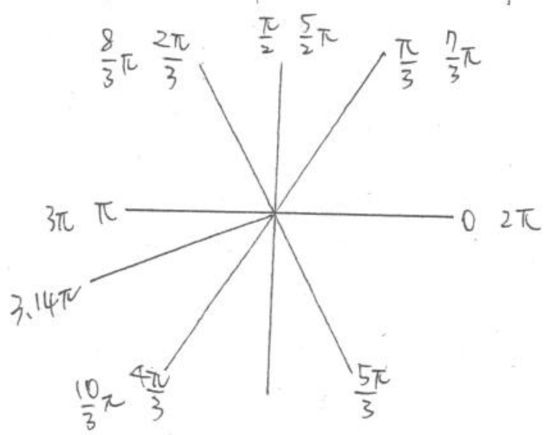
1、 $a_1+2+(a_2+4)+\cdots+(a_k+2k)+\cdots+(a_{10}+20)=240$

$\Rightarrow (a_1+a_2+\cdots+a_{10})+(2+4+\cdots+20)=240$

$\Rightarrow (a_1+a_2+\cdots+a_{10})+\dfrac{10(2+20)}{2}=240$

$\Rightarrow a_1+a_2+\cdots+a_{10}+110=240 \Rightarrow a_1+a_2+\cdots+a_{10}=130$ (3) #

2、 選項均與 $\pm\frac{1}{2}$ 有關 $\Rightarrow \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$



$\cos\pi^2 \approx \cos(3.14\pi)$

$3\pi \le 3.14\pi \le \frac{10}{3}\pi$

$\therefore \cos 3\pi = \cos\pi = -1$

$\cos\frac{10}{3}\pi = -\cos\frac{\pi}{3} = \frac{-1}{2}$

$\therefore \quad -1 < a < \frac{-1}{2}$ (2) #

3、看到除法⇒除法原理.(被除式=除式×商+餘式)

$f(x)=g(x)\cdot Q(x)+(x^4-1)$

$\Rightarrow (f(x), g(x)) = (g(x), (x^4-1))$

∴可能之公因式⇒必定是 (x^4-1) 的因式.

⇒僅 (x^3-1) 不是 x^4-1 之因式

※公因式可以有係數倍.

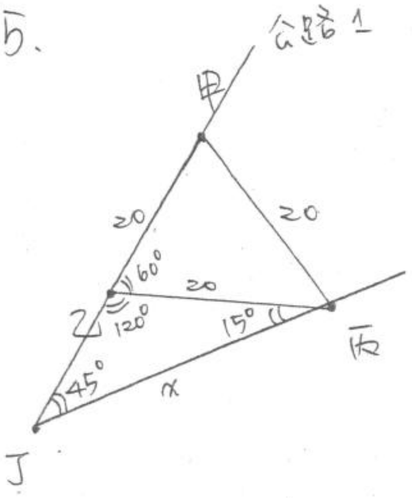
(4) #

4. 同甲 同乙 同丙

$$\frac{C^3_2+C^4_2+C^5_2}{C^{12}_2}=\frac{3+6+10}{66}=\frac{19}{66}\approx 0.29$$

(5) #

5.



設丙丁兩鎮距 x 公里

$$\Rightarrow \frac{x}{\sin 120^\circ} = \frac{20}{\sin 45^\circ}$$

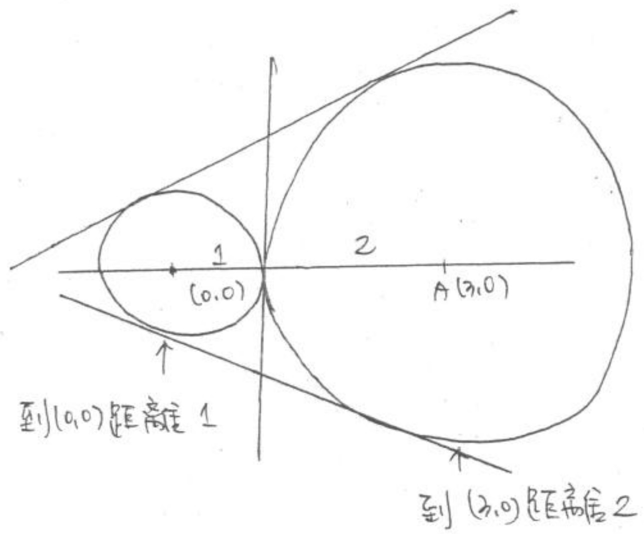
$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{20}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow x = 20 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{6}$$

≈ 24.49

(1) #

6.



圓心到直線的距離即切線

∴滿足此二條件 ⇒ 即公切線

⇒ 公切線有 3 條

(3) #

7. 可化分數的數稱有理數.

(1) 3.1416 (o)

(2) $\sqrt{3}$ (x)

(3) $\log_{10}\sqrt{5} + \log_{10}\sqrt{2} = \log_{10}\sqrt{10} = \log_{10}10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ (o)

(4) $\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} = 4$ (o)

(5) 若 x^3-2x^2+x-1 有有理根 ⇒ 必是 ±1.

① 檢驗 1 ⇒ $1^3-2+1-1=-1\neq 0$.

② 檢驗 −1 ⇒ $(-1)^3-2(-1)^2-1-1=-5\neq 0$

] 無有理根 (x)

(1)(3)(4) #

8、

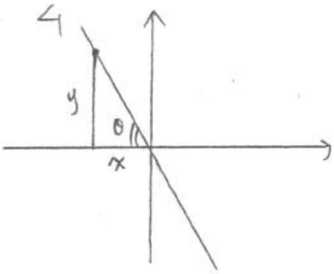
(1) $m_3>0>m_1>m_2$ (x)

(2) $L_1 \perp L_3 \Rightarrow m_1 \cdot m_3 = -1$

$L_3 \parallel L_4 \Rightarrow m_3 = m_4$

$\Rightarrow m_1 \cdot m_4 = -1$ (o)

(3)



可量測知 $y>x$ (當 $y=x \Rightarrow m=-1$)

$\Rightarrow m<-1$ (+、-表方向,愈斜數字愈大) (o)

(4) $m_1 \cdot m_3 = -1$

又 $m_2<m_1<0 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1}>1$

同乘負號 $\Rightarrow \frac{m_2}{m_1}\cdot(m_1 \cdot m_3) < 1\cdot(-1)$

$\Rightarrow m_2 \cdot m_3 < -1$ (o)

(5) L_4 與 y 軸之交點 $(0,c)$ ⇒ 在 x 軸下方 ⇒ $c<0$ (x)

(2)(3)(4)*

9. 設甲地參訪者聽過該產品比例 $\hat{p}_甲$,參訪人數 $n_甲$ ⇒ 信賴區間 $\left[\hat{p}-2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p}+2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$

乙地 : $\hat{p}_乙$ $n_乙$

(1) $\hat{p}_甲 = \frac{0.50+0.58}{2} = 0.54$ (o)

(2) $0.04 = 2\sqrt{\frac{0.54\times0.46}{n_甲}}$

$0.04 = 2\sqrt{\frac{0.12\times0.88}{n_乙}}$

$\Rightarrow 0.54\times0.46 > 0.12\times0.88$

$\therefore n_甲 > n_乙$ (o)

(3) 解讀應為:相同調查做100次,約有95次算出來之信賴區間含真值 (x)

(4) 解讀應同上 (x)

(5) 重新調查 $n \to 4n$ (人數4倍),但 $\hat{p}$ 值會改變

⇒ 無法確認信賴區間 (x)

(1)(2)*

10、

$$\begin{cases} x+2y+az=1 & \text{——①} \\ 3x+4y+bz=-1 & \text{——②} \\ 2x+10y+7z=c & \text{——③} \end{cases}$$

$① \times 3 - ② \Rightarrow 2y+(3a-b)z=4$

$① \times 2 - ③ \Rightarrow -6y+(2a-7)z=2-c$

$1°$ 無限多解 $\Leftrightarrow \frac{2}{-6}=\frac{3a-b}{2a-7}=\frac{4}{2-c}$

$\therefore \cancel{2}^{1}(2a-7)=\cancel{-6}^{-3}(3a-b)$ 且 $2-c=-12$

$\Rightarrow 2a-7=-9a+3b$ 且 $c=14$

$\Rightarrow 11a-3b=7$ 且 $c=14$

$2°$ 無解 $\Leftrightarrow \frac{2}{-6}=\frac{3a-b}{2a-7}\neq\frac{4}{2-c}$

$\Rightarrow 11a-3b=7$ 且 $c\neq 14$

$3°$ 一解 $\Leftrightarrow \frac{2}{-6}\neq\frac{3a-b}{2a-7}$

$\Rightarrow 11a-3b\neq 7$

(1) 有解 $\Rightarrow$ 一解或無限多解 (x)

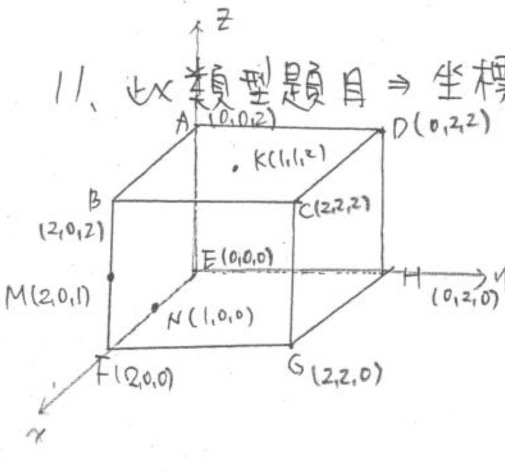
(2) 有解 $\Rightarrow \begin{cases} \text{一解}: 11a-3b\neq 7 \\ \text{無限多解}: 11a-3b=7 \text{ 且 } c=14 \end{cases}$ (x)

(3) 同上 (x)

(4)
(5) 無解 $\Rightarrow 11a-3b=7$ 且 $c\neq 14$ (o)

(4)(5)

11、此類題目 ⇒ 坐標化



(1) $\overrightarrow{KM}=(1,-1,-1)$

$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$

$\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$

$\overrightarrow{AE}=(0,0,-2)$

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})=(1,-1,-1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{KM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$ (o)

(2) $\overrightarrow{KM}=(1,-1,-1)$, $\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$

$\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{AB}=2+0+0=2$ (X)

(3) $|\overrightarrow{KM}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$ (X)

(4) $\overrightarrow{KM}=(1,-1,-1)$

$\overrightarrow{KN}=(0,-1,-2)$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{MN}=(-1)+0+1=0$

$\overrightarrow{MN}=(-1,0,-1)$ ∴ ∠M為直角 (O)

(5) △KMN 由 $\overrightarrow{KM}$. $\overrightarrow{KN}$ 所展成

$$\begin{array}{cccccc} \cancel{1} & -1 & -1 & 1 & -1 & \cancel{-1} \\ \cancel{0} & -1 & -2 & 0 & -1 & \cancel{-2} \\ \hline & 1 & 2 & -1 & & \end{array}$$

∴ $\triangle KMN=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ (X)

(1)(4)#

A、

99 → 3的倍數

98 → 2的倍數

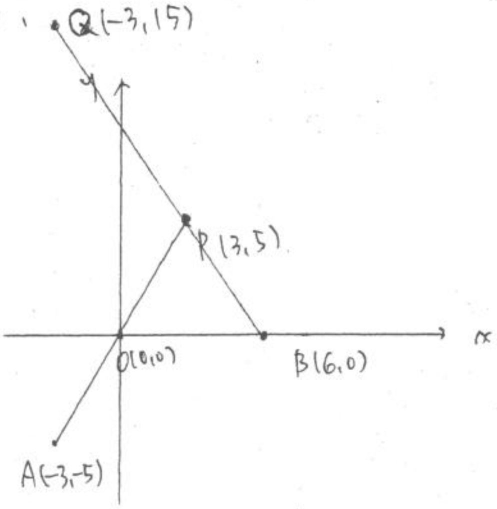
97 → 質數

96 → 2的倍數

95 → 非2.3倍數,非質數

95#

B、



沿 $\overrightarrow{AO}$ 前往至 P ⇒ P(3,5)

沿 2 $\overrightarrow{BP}$ 前往至 Q ⇒ Q(-3,15)

沿 3 $\overrightarrow{CQ}$ 前往至 O ⇒ $\overrightarrow{QO}=3\overrightarrow{CQ}$

$(3,-15)=3(-3-x,15-y)$

$\Rightarrow (-3-x,15-y)=(1,-5)$

$\Rightarrow x=-4,\ y=20$

$(-4,20)$#

C、設放入 x 顆其他色的球

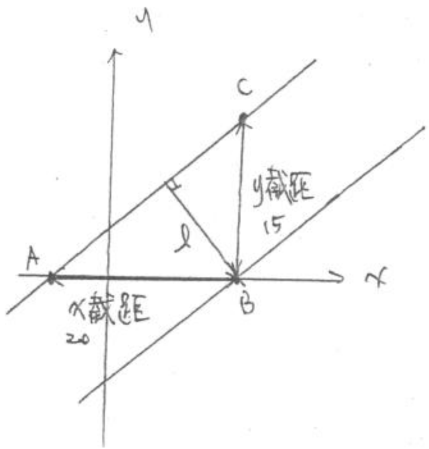
事件	機率	報酬
藍色	$\frac{2}{x+7}$	2000
紅色	$\frac{5}{x+7}$	1000

$\Rightarrow$ 期望值 $= \frac{2}{x+7}\cdot 2000 + \frac{5}{x+7}\cdot 1000 = 300$

$\Rightarrow \frac{4000}{x+7} + \frac{5000}{x+7} = 300 \Rightarrow 9000 = 300(x+7) \Rightarrow x+7 = 30 \Rightarrow x = 23$

23 #

D、



設兩直線距離 l

由直角三角形 ABC 知 $\Rightarrow \overline{AC} = 25$

$\triangle ABC$ 面積 $= \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 20 = \frac{1}{2}\cdot 25\cdot l$

$\Rightarrow l = 12$

12 #

E、平方或絕對值內是對稱軸：

Ex: $(y+2)^2 = 5x \Rightarrow y+2=0$ 是對稱軸.

$|x| = 4y \Rightarrow x=0$ 是對稱軸.

已知拋物線之對稱軸 $x = \frac{-3}{4} \Rightarrow$ 可設 P_1: $(x+\frac{3}{4})^2 = 4c(y-k)$

又 $c = \frac{1}{8} \Rightarrow (x+\frac{3}{4})^2 = \frac{1}{2}(y-k)$

$\because P_1$、P_2 只有一個交點

$\therefore \begin{cases} P_1 = 0 \\ P_2 = 0 \end{cases}$ 只有一組解 $\Rightarrow \begin{cases} (x+\frac{3}{4})^2 = \frac{1}{2}(y-k) & \text{—①} \\ y = x^2 & \text{—②} \end{cases}$ 只有一解

② 代入 ① $\Rightarrow (x+\frac{3}{4})^2 = \frac{1}{2}(x^2-k) \Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}k$

$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + (\frac{9}{16} + \frac{1}{2}k) = 0$

$\because$ 只有一解 $\therefore D = 0 \Rightarrow (\frac{3}{2})^2 - 4\cdot\frac{1}{2}(\frac{9}{16} + \frac{1}{2}k) = 0$

$\therefore \frac{9}{4}-2\left(\frac{9}{16}+\frac{1}{2}k\right)=0$

$\Rightarrow 36-2(9+8k)=0$

$\Rightarrow 36-18-16k=0 \Rightarrow 16k=18 \Rightarrow k=\frac{9}{8}$

$\underline{\frac{9}{8}}$ #

F. 類似問題 ⇒ 計算剩餘量.

設每年減少 $r\%$ ⇒ 每年剩 $1-r\%$

設現在的排放量 N.

$\Rightarrow N\cdot(1-r\%)^5=75\%\cdot N$

$\Rightarrow (1-r\%)^5=0.75$

取 log ⇒ $\log(1-r\%)^5=\log 0.75$

$\Rightarrow 5\log(1-r\%)=\log\frac{3}{4}=\log 3-\log 4=-0.1249$

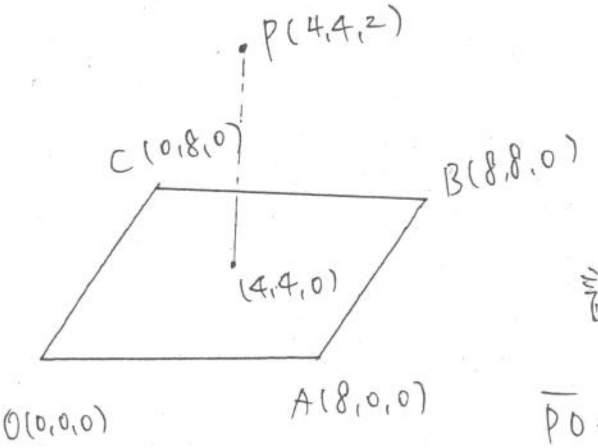
$\Rightarrow \log(1-r\%)=-0.02498=-1+0.97502$

$=-1+\log 9.44$

$\therefore 1-r\%=0.944 \Rightarrow r\%=0.056 \Rightarrow r=5.6$

$\underline{5.6}$ #

G.



到四頂點等距

⇒ P必落在ABCD之中心 (4,4,0)

設 P(4,4,z)

$\overline{PO}=6 \Rightarrow \sqrt{4^2+4^2+z^2}=36$

$\Rightarrow 16+16+z^2=36 \Rightarrow z^2=4 \Rightarrow z=\pm 2$ (取正)

過 A, B, P 平面. 求平面 ⇒ 找一個法向量

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$, $\vec{n}\perp\overrightarrow{AP}$ ⇒

$$\begin{array}{cccccc} 8 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 4 & 2 \\ \hline 16 & 0 & 32 \end{array}$$

$\vec{n}\parallel(16,0,32)\parallel(1,0,2)$

$\Rightarrow x+2z \overset{(8,0,0)}{=\!=} 8$

$\overrightarrow{AB}=(0,8,0)$, $\overrightarrow{AP}=(-4,4,2)$

$(b,c,d)=(0,2,8)$ #

H、圓錐曲線，⇒多考定義式

設橢圓之長軸長 $=2a$ ⇒ $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$

短軸長 $=2b$

焦距 $=2c$

又雙曲線之貫軸長 $=2b$ ⇒ $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2b$.

看到 $\overline{PF_1}\pm\overline{PF_2}$，又有 $\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}$ ⇒ 平方.

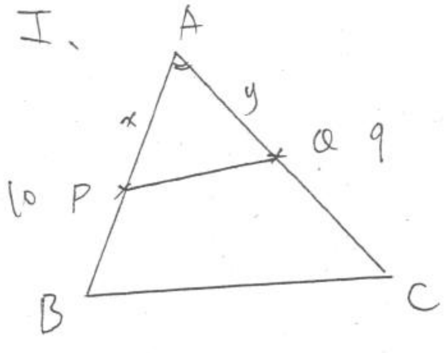
$$(\overline{PF_1}+\overline{PF_2})^2=\overline{PF_1}^2+\overline{PF_2}^2+2\overline{PF_1}\,\overline{PF_2} \Rightarrow 4a^2=\overline{PF_1}^2+\overline{PF_2}^2+2\times 64 \quad ①$$

$$(\overline{PF_1}-\overline{PF_2})^2=\overline{PF_1}^2+\overline{PF_2}^2-2\overline{PF_1}\,\overline{PF_2} \Rightarrow 4b^2=\overline{PF_1}^2+\overline{PF_2}^2-2\times 64 \quad ②$$

①−② ⇒ $4(a^2-b^2)=4\times 64$ ⇒ $a^2-b^2=64$ 又 $(a^2=b^2+c^2)$

∴ $c^2=64$ ⇒ $c=8$. ⇒ $2c=16$ 　　16 #

I、



設 $\overline{AP}=x$，$\overline{AQ}=y$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 9\cdot \sin A$

$\triangle APQ=\frac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot \sin A$

$\triangle ABC=2\triangle APQ$ ⇒ $90=2xy$ ⇒ $xy=45$

求 $\overline{PQ}=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos A}=\sqrt{x^2+y^2-2\cdot 45\cdot\frac{3}{8}}=\sqrt{x^2+y^2-\frac{135}{4}}$

求極值均先不管常數 ⇒ 已知 $xy=45$，求 x^2+y^2 ·(算幾不等式)

⇒ $\frac{x^2+y^2}{2}\geq\sqrt{x^2y^2}$ ⇒ $\frac{x^2+y^2}{2}\geq xy=45$ ⇒ $x^2+y^2\geq 90$

∴ $\overline{PQ}\geq\sqrt{90-\frac{135}{4}}=\sqrt{\frac{225}{4}}=\frac{15}{2}$ 　　$\frac{15}{2}$ #