1、$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_9, a_{10}$ $\qquad a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9+a_{10}$.

10個 1	10
9個 1，1個(-1)	8
8個 1，2個(-1)	6
⋮	
0個 1，10個(-1)	-10

⇒ 共 11 種

(2)#

2、

$$\begin{vmatrix} 5 & a \\ b & 7 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow 35-ab=4 \Rightarrow ab=31$$

∵ a, b 均為整數 ∴ $ab = 31 = 1\times 31$
$= 31 \times 1$
$= (-1)\times(-31)$
$= (-31)\times(-1)$

但此四種情形 $|a+b| = 32$

(3)#

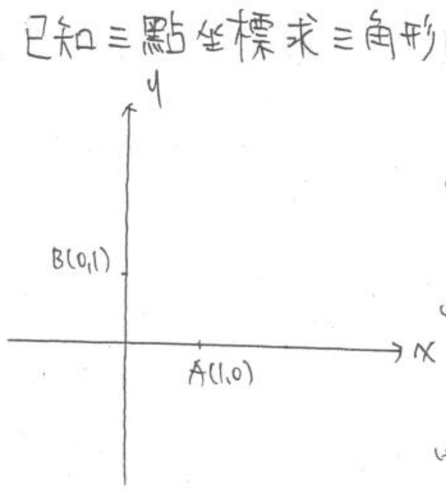
3、

事件	機率	報酬
兩球異色	$\frac{C^3_1 \cdot C^3_1}{C^6_2} = \frac{9}{15}$	100
兩球同色	$\frac{C^3_2 + C^3_2}{C^6_2} = \frac{6}{15}$	0

⇒ 期望值 $= 100 \times \frac{9}{15} + 0 \times \frac{6}{15} = 60$

(5)#

4、已知三點坐標求三角形面積 ⇒ 向量 = ①平面: $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|$
②空間: $\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}$



(1) $\triangle PAB$: $\overrightarrow{AB} = (-1,1)$ $\overrightarrow{AP} = (\pi-1, 1)$

$\triangle PAB = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \pi-1 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{\pi}{2} \approx \frac{3.14}{2}$

(2) $\triangle QAB$: $\overrightarrow{AB} = (-1,1)$. $\overrightarrow{AQ} = (-\sqrt{3}-1, 6)$

$\triangle QAB = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -\sqrt{3}-1 & 6 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|-6+\sqrt{3}+1\right| = \frac{1}{2}(5-\sqrt{3}) \approx \frac{3.268}{2}$

(3) $\log_4 32 = \log_{2^2} 2^5 = \frac{5}{2} \Rightarrow R(2, \frac{5}{2})$

$\triangle RAB$: $\overrightarrow{AB}=(-1,1)$ $\overrightarrow{AR}=(1,\frac{5}{2})$

$\triangle RAB=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & \frac{5}{2}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{-7}{2}\right|=\frac{1}{2}\times\frac{7}{2}\approx\frac{1}{2}\times 3.5$

$\therefore\ r>q>p$

(1)#

5、原本 → 1小時後 → 2小時後 → ... → 100小時後

1 $\quad 1\cdot(1.08)$ $\quad 1\cdot(1.08)^2$ $\quad 1\cdot(1.08)^{100}$

(千隻)

問題在次方 ⇒ 取 log.

設 $x=(1.08)^{100}$

$\Rightarrow \log x=\log(1.08)^{100}=100\log 1.08=100(\log \overset{2^2\times 3^3}{108}-\log 100)$

$=100(2\log 2+3\log 3-2)=100\times(2\times 0.3010+3\times 0.4771-2)=3.33$

$=3+0.33=n+\log a$

$\left.\begin{array}{l} n=3 \Rightarrow \text{表 } x \text{ 是 4 位數} \\ \log 2<\log a=0.33<\log 3 \Rightarrow \text{表 } x \text{ 是 2 開頭的數} \end{array}\right\}\ x=2\times\times\times$

(3)#

6、求動點P的軌跡 ⇒ 設 $P(x,y,z)$，依條件列式

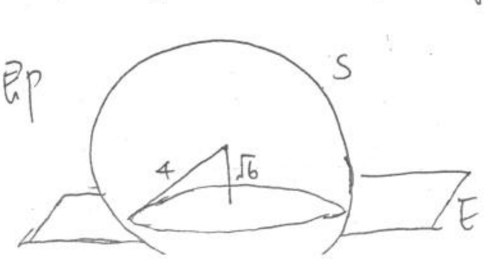
$P\begin{cases} \text{① 在 } S \text{ 上} \\ \text{② 滿足 } \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=6 \end{cases}$

設 $P(x,y,z)$ $\begin{cases} ①\ x^2+y^2+z^2=4^2 \\ ②\ x+2y+z=6. \quad \text{(平面E)} \end{cases}$

$\overrightarrow{OA}=(1,2,1)$

$\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$ 球心到平面的距離 $=\frac{|-6|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}<4$

即



⇒ 交於一圓

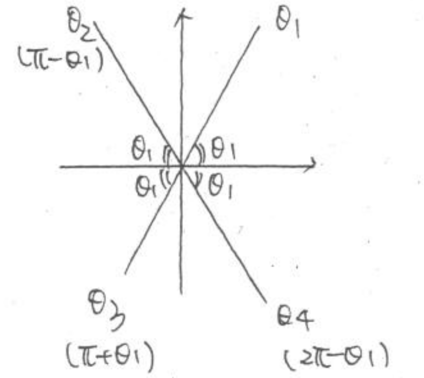
(4)#

7、

		長軸長
$P_1:\ \dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$	$\Rightarrow a=5$	10
$P_2:\ \dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=2$		
$\Rightarrow \dfrac{x^2}{2\cdot5^2}+\dfrac{y^2}{2\cdot3^2}=1$	$\Rightarrow a=\sqrt{2\cdot5^2}=5\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$
$P_3:\ \dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{2x}{5}+\dfrac{y^2}{3^2}=0$		
$\Rightarrow \dfrac{1}{5^2}(x^2-10x)+\dfrac{y^2}{3^2}=0$		10
$\Rightarrow \dfrac{1}{5^2}\left[(x-5)^2-25\right]+\dfrac{y^2}{3}=0$		
$\Rightarrow \dfrac{(x-5)^2}{5^2}-1+\dfrac{y^2}{3}=0$		
$\Rightarrow \dfrac{(x-5)^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3}=1$	$\Rightarrow a=5$	

$\therefore\ l_1=l_3<l_2$ $\qquad\qquad$ (4) #

8. 不論正負，四個象限之三角函數值均相同 ⇒ 與x軸夾角相同



(1) $\cos\theta_1=\dfrac{1}{3}\quad \cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

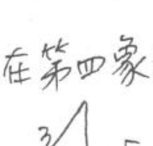
$\because \dfrac{1}{3}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \Rightarrow\ \theta_1>\dfrac{\pi}{4}$ (x)

※在第一象限，正函數 (sinθ, tanθ, secθ) ⇒ 角度愈大，其值愈大；
餘函數 (cosθ, cotθ, cscθ) ⇒ 角度愈大，其值愈小

(2) $\theta_2=\pi-\theta_1\ \Rightarrow\ \theta_1+\theta_2=\pi$ (o)

(3) θ_3在第三象限 ⇒ $\cos\theta$值為負 $\quad\therefore \cos\theta_3=\dfrac{-1}{3}$ (o)

(4) θ_4在第四象限 ⇒ $\sin\theta$值為負 $\quad\therefore \sin\theta_4=\dfrac{-2\sqrt{2}}{3}$ (x)



(5) $\theta_4=\theta_3+\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow(2\pi-\theta_1)=(\pi+\theta_1)+\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow 2\theta_1=\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow\theta_1=\dfrac{\pi}{4}$ (x

(2)(3) #

9. (1) 三次方程式的解 $\begin{cases} ① 三實根 \\ ② 一實根兩虛根 \end{cases}$ ⇒ 必有實根 (o)

(2)

$2^x + 2^{-x} \geq 2$ ∴ $2^x + 2^{-x} = 0$ 無實數解 (x)

(∵ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 算幾不等式

$\frac{2^x + 2^{-x}}{2} \geq \sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} \Rightarrow \frac{2^x + 2^{-x}}{2} \geq \sqrt{1} \Rightarrow 2^x + 2^{-x} \geq 2$)

(3) 令 $t = \log_2 x \Rightarrow \log_x 2 = \frac{1}{t}$

原式 $\Rightarrow t + \frac{1}{t} = 1 \Rightarrow t^2 + 1 = t \Rightarrow t^2 - t + 1 = 0$.

$\Rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$ ⇒ t 無實數解 ⇒ x 無實數解 (x)

(4)

$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \sin x + \cos 2x \leq 2$

$-1 \leq \cos 2x \leq 1$ ∴ $\sin x + \cos 2x = 3$ 無實數解 (x)

(5) 疊合公式：$|a\sin x + b\cos x| \leq \sqrt{a^2+b^2}$

$|4\sin x + 3\cos x| \leq \sqrt{4^2+3^2} = 5$

$\frac{9}{2} < 5$ ⇒ 有實數解 (o)

(1)(5) #

10、 由選項(4)、(5)可猜測 a_{n+2} 和 a_n 有關係.

原式：$a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} - a_n$ —— ①

$n = n+1$ 代入 $\Rightarrow a_{n+2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - a_{n+1}$ —— ②

① 代入 ② $\Rightarrow a_{n+2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \left[\frac{n(n+1)}{2} - a_n\right] = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} + a_n$

$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{(n+1)\cdot 2}{2} + a_n \Rightarrow a_{n+2} = (n+1) + a_n \Rightarrow a_{n+2} - a_n = (n+1)$

(1) $n = 1$ 代入關係式 $\Rightarrow a_2 = \frac{1\times 2}{2} - a_1 = 1 - 1 = 0$ (x)

(2) $\frac{n(n+1)}{2}$ 必是整數（∵ n和n+1 必一奇一偶）

∴若 a_n 是整數 ⇒ $\frac{n(n+1)}{2} - a_n = a_{n+1}$ 必是整數 (O)

(3) 若 a_1 是無理數 ⇒ $\underbrace{\frac{n(n+1)}{2} - a_1}_{\text{整數}-\text{無理數}} = a_2$ ⇒必是無理數.

… 依此類推 ⇒ $\underbrace{\frac{n(n+1)}{2} - a_n}_{\text{整數}-\text{無理數}=\text{無理數}} = a_{n+1}$ ⇒必是無理數. (O)

(4) $a_{n+2} - a_n = n+1$ ，也就是 $a_4 - a_2 = 3$

$a_6 - a_4 = 5$

⋮

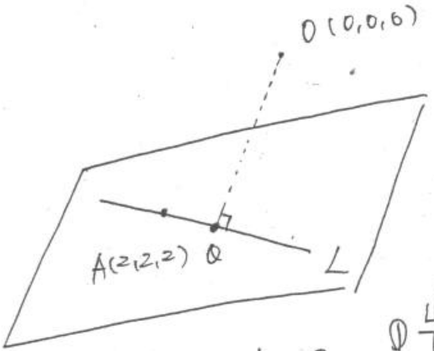
⇒ $a_2 \leq a_4 \leq \cdots \leq a_{2n} \leq \cdots$ (O)

(5) a_k 是奇數 ⇒ $a_{k+2} - a_k = k+1$ ⇒ $a_{k+2} = a_k + (k+1)$

若 k 是偶數 ⇒ k+1 是奇數 ⇒ $\underbrace{a_k}_{\text{奇}} + \underbrace{(k+1)}_{\text{奇}}$ = 偶數 = a_{k+2} (×)

(2)(3)(4)*

11.



2x−y = 2

∵ Q是 O 在 L 上之投影點

∴ ① Q在 L 上 ⇒ Q在 E: 2x−y = 2 上.

② $\overline{OQ} \perp L$ ⇒ $\overrightarrow{OQ} \perp \overrightarrow{AQ}$

①先檢查 Q 是否在平面 E 上.

(1) $2\times2-2=2$ (符合)

(2) $2\times2-0=4\neq2$ (不合)

(3) $2\times\frac{4}{5}-(\frac{-2}{5})=\frac{10}{5}=2$ (符合)

(4) $2\times\frac{4}{5}-(\frac{-2}{5})=\frac{10}{5}=2$ (符合)

(5) $2\times\frac{8}{9}-(\frac{-2}{9})=\frac{18}{9}=2$ (符合)

② 檢查 $\overrightarrow{OQ} \perp \overrightarrow{AQ}$ 是否成立.

(1) $(2,2,2)\cdot(0,0,0)=0$ (O)

(3) $(\frac{4}{5},\frac{-2}{5},0)\cdot(\frac{-6}{5},\frac{-12}{5},-2)=\frac{-24}{5}+\frac{24}{5}=0$ (O)

(4) $(\frac{4}{5},\frac{-2}{5},-2)\cdot(\frac{-6}{5},\frac{-12}{5},-4)=\frac{-24}{5}+\frac{24}{5}+8\neq 0$ (X)

(5) $(\frac{8}{9},\frac{-2}{9},\frac{-2}{9})\cdot(\frac{-10}{9},\frac{-20}{9},\frac{-20}{9})=\frac{-80}{81}+\frac{40}{81}+\frac{40}{81}=0$ (O)

(1)(3)(5) #

12、

(1) 抽樣不可取代全體 (X)

(2) 95% 信心水準下之信賴區間 $\left[\hat{p}-2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p}+2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$

$\Rightarrow [0.52-2\times0.02,\ 0.52+2\times0.02]=[0.48,\ 0.56]$ (O)

(3) 誤差愈小 ⇒ 抽樣人數愈多 (X)

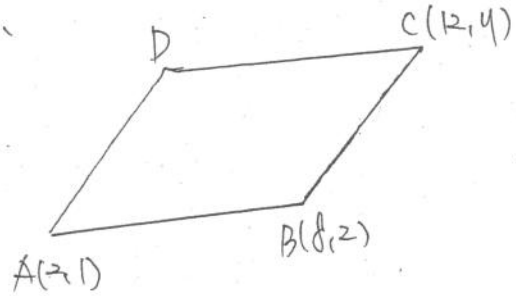
(4) 資料合併的平均,介於兩組資料之平均間. (O)

(5) 人數愈多 ⇒ 誤差愈小, 合併後之標準差應小於 0.02 (X)

(2)(4) #

貳、選填題

A、



設 D(12,y) (y>0)

平行四邊形 ABCD 面積 $=\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{BA}\\ \overrightarrow{BC}\end{vmatrix}\right|$

$=\left|\begin{vmatrix}-6 & -1\\ 4 & y-2\end{vmatrix}\right|$

$\overrightarrow{BA}=(-6,-1)$

$\overrightarrow{BC}=(4,y-2)$

$=|-6(y-2)+4|=38$

$\Rightarrow -6(y-2)+4=\pm 38 \Rightarrow -6(y-2)=34$ or $-42 \Rightarrow y-2=\frac{-17}{3}$ or 7

$\Rightarrow y=\frac{-11}{3}$ or 9 (取正) ⇒ 又 $\underline{A+C=B+D} \Rightarrow D=A+C-B=(6,8)$

平行四邊形, 求坐標.

(6,8) #

B、 $f(x)$ 是實係數多項式 $\Rightarrow$ 虛根共軛

$\therefore f(x)$ 有根 $3-2i,\ 3+2i,\ i,\ -i,\ 5$

$\Rightarrow f(x)$ 有因式 $(x-(3-2i)),\ (x-(3+2i)),\ (x-i),\ (x+i),\ (x-5)$

$f(x)$ 是滿足條件之最低次多項式且最高次係數為 1.

$\therefore f(x)=(x-(3-2i))(x-(3+2i))(x-i)(x+i)(x-5)$

$\Rightarrow f(x)$ 之常數項 $=f(0)=(-3+2i)(-3-2i)(-i)(i)(-5)$

$=\left[(-3)^2-(2i)^2\right](-i^2)\cdot(-5)$

$=13\times1\times(-5)=-65$

$\underline{-65}$ #

C、 先填入 1 $\Rightarrow$ 有 6 個選擇

再填入 2 $\Rightarrow$ 有 3 個選擇（同列 2 個位置、同行 1 個位置）

剩下的 3,4,5,6 $\Rightarrow 4!$

$\therefore 6\times3\times4!=18\times24=432$

$\underline{432}$ #

D、 先找出 $\begin{cases}2x-y=1\\x-2y=a\end{cases}$ 的解

$\begin{cases}2x-y=1 & —① \\ x-2y=a & —②\end{cases}$

$①-②\times2 \Rightarrow 3y=1-2a \Rightarrow y=\dfrac{1-2a}{3}$

$①\times2-② \Rightarrow 3x=2-a \Rightarrow x=\dfrac{2-a}{3}$

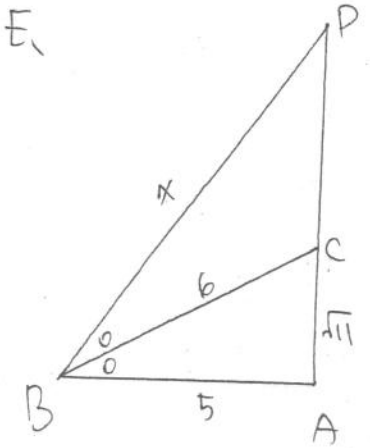
$\left(\dfrac{2-a}{3},\dfrac{1-2a}{3}\right)$ 必在 $x-ay=122$ 上 $\Rightarrow \dfrac{2-a}{3}-a\left(\dfrac{1-2a}{3}\right)=122$

$\therefore 2-a-a(1-2a)=366 \Rightarrow 2-a-a+2a^2=366 \Rightarrow 2a^2-2a-364=0$

$\Rightarrow a^2-a-182=0 \Rightarrow (a-14)(a+13)=0 \Rightarrow a=14$ or -13 （取正）

$\underline{14}$ #

E、



設 $\overline{BD} = x$

$\Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{x^2 - 5^2} \Rightarrow \overline{CD} = \sqrt{x^2-25} - \sqrt{11}$

∵ BC 是 ∠ABD 之角平分線

∴ $\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{x^2-25}-\sqrt{11}}$

$\Rightarrow 5\sqrt{x^2-25} - 5\sqrt{11} = x\sqrt{11}$

$\Rightarrow 5\sqrt{x^2-25} = \sqrt{11}(x+5)$

平方 $\Rightarrow 25(x^2-25) = 11(x^2+10x+25)$

$\Rightarrow 25x^2 - 625 = 11x^2 + 110x + 275$

$\Rightarrow 14x^2 - 110x - 900 = 0$

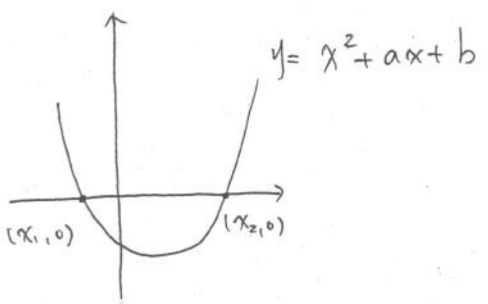
$\Rightarrow 7x^2 - 55x - 450 = 0$

$\Rightarrow (7x-90)(x+5) = 0$

$\Rightarrow x = \frac{90}{7}$ or -5 (取正)

$\underline{\frac{90}{7}}$ ※

F、

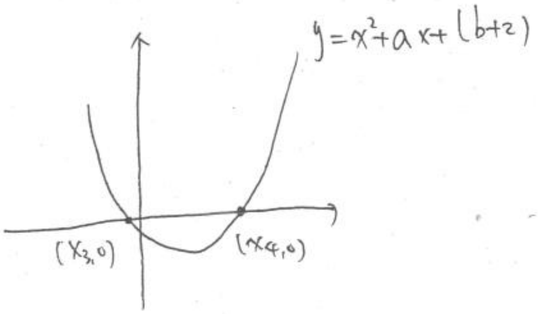


設 $y = x^2+ax+b$ 與 x 軸交於 $(x_1,0)$, $(x_2,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 \cdot x_2 = b \end{cases}$

$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{a^2-4b} = 7$

∴ $a^2 - 4b = 49$

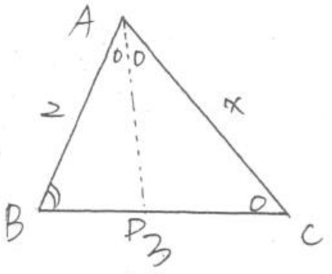


設 $y = x^2+ax+(b+2)$ 與 x 軸交於 $(x_3,0)$, $(x_4,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} x_3 + x_4 = -a \\ x_3 \cdot x_4 = b+2 \end{cases}$

$|x_3 - x_4| = \sqrt{(x_3+x_4)^2 - 4x_3x_4} = \sqrt{a^2-4b-8} = \sqrt{41}$ $\quad \underline{\sqrt{41}}$ ※

G.



設 $\overline{AC}=x$，作 ∠A之角平分線 $\overline{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D.

∵ $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \Rightarrow \overline{BD}=\dfrac{2}{2+x}\cdot 3$ 　 $\overline{CD}=\dfrac{x}{2+x}\cdot 3$

又 $\overline{AD}=\overline{CD}=\dfrac{3x}{2+x}$

$$\cos B=\frac{2^2+\left(\frac{6}{2+x}\right)^2-\left(\frac{3x}{2+x}\right)^2}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{6}{2+x}}=\frac{2^2+3^2-x^2}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 3}$$

$$\Rightarrow \frac{4(2+x)^2+6^2-(3x)^2}{2\cancel{6}(2+x)}=\frac{4+9-x^2}{\cancel{3}}$$

$$\Rightarrow 4(4+4x+x^2)+36-9x^2=2(2+x)(13-x^2)$$

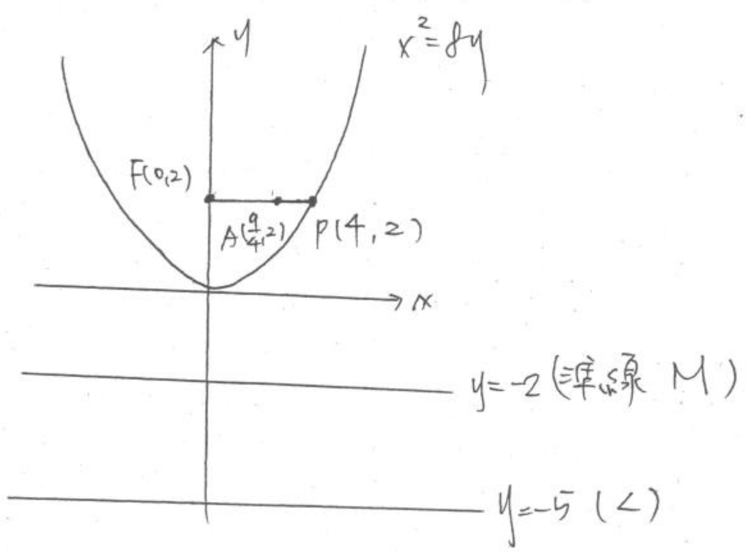
$$\Rightarrow 16+16x+4x^2+36-9x^2=2(26-2x^2+13x-x^3)$$

$$\Rightarrow 2x^3-x^2-10x=0 \Rightarrow 2x^2-x-10=0$$

$$\Rightarrow (2x-5)(x+2)=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \text{ or } -2 \text{（取正）}$$

$\frac{5}{2}$ #

H. 與圓錐曲線相關 ⇒ 定義式（常用）



$d(P,L)=d(P,M)+3$

又拋物線定義 $d(P,M)=\overline{PF}$

∴ $|d(P,L)-\overline{AP}|$

$=|\overline{PF}-\overline{AP}+3|$

如圖最大值發生在 $P(4,2)$

⇒ 所求 $=\left|\frac{9}{4}+3\right|=\frac{21}{4}$

$\frac{21}{4}$ #