1、$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_9, a_{10}$ $\qquad a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9+a_{10}$.

10個 1	10
9個 1，1個(-1)	8
8個 1，2個(-1)	6
⋮	
0個 1，10個(-1)	-10

⇒ 共 11種

(2)*

2、

$$\begin{vmatrix} 5 & a \\ b & 7 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow 35-ab=4 \Rightarrow ab=31$$

∵ a, b 均為整數 ∴ $ab = 31 = 1\times 31$
$= 31\times 1$
$= (-1)\times(-31)$
$= (-31)\times(-1)$

但此四種情形 $|a+b| = 32$

(3)*

3、

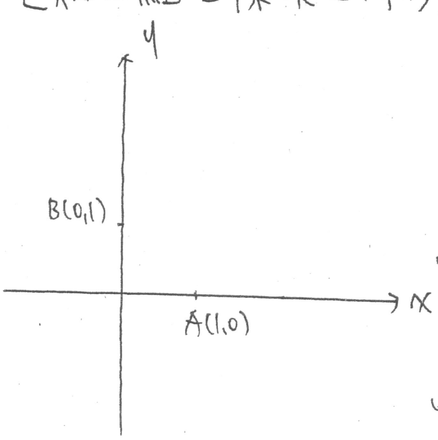
事件	機率	報酬
兩球異色	$\frac{C^3_1 \cdot C^3_1}{C^6_2} = \frac{9}{15}$	100
兩球同色	$\frac{C^3_2 + C^3_2}{C^6_2} = \frac{6}{15}$	0

⇒ 期望值 $= 100\times\frac{9}{15} + 0\times\frac{6}{15} = 60$

(5)*

4、已知三點坐標求三角形面積 ⇒ 向量．＝ ① 平面：$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|$

② 空間：$\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}$



(1) $\triangle PAB$：$\overrightarrow{AB} = (-1, 1)$ $\quad \overrightarrow{AP} = (\pi-1, 1)$

$\triangle PAB = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \pi-1 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{\pi}{2} \approx \frac{3.14}{2}$

(2) $\triangle QAB$：$\overrightarrow{AB} = (-1, 1)$. $\overrightarrow{AQ} = (-\sqrt{3}-1, 6)$

$\triangle QAB = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -\sqrt{3}-1 & 6 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|-6+\sqrt{3}+1\right| = \frac{1}{2}(5-\sqrt{3}) \approx \frac{3.268}{2}$

(3) $\log_4 32 = \log_{2^2} 2^5 = \frac{5}{2} \Rightarrow R(2, \frac{5}{2})$

$\triangle RAB$: $\overrightarrow{AB}=(-1,1)$ $\quad \overrightarrow{AR}=(1,\frac{5}{2})$

$$\triangle RAB=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}-1 & 1\\ 1 & \frac{5}{2}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{-7}{2}\right|=\frac{1}{2}\times\frac{7}{2}\approx\frac{1}{2}\times3.5$$

$\therefore\ r>q>p$

(1)※

5、原本 → 1小時後 → 2小時後 → ... → 100小時後

1 $\quad$ $1\cdot(1.08)$ $\quad$ $1\cdot(1.08)^2$ $\quad$ $1\cdot(1.08)^{100}$

(千隻)

問題在次方 ⇒ 取 $\log$.

設 $x=(1.08)^{100}$

$$\Rightarrow \log x=\log(1.08)^{100}=100\log1.08=100(\log\overset{2^2\times3^3}{\overset{\shortparallel}{108}}-\log100)$$

$$=100(2\log2+3\log3-2)=100\times(2\times0.3010+3\times0.4771-2)=3.33$$

$$=3+0.33=n+\log a$$

$n=3$ ⇒ 表 x 是 4 位數

$\log2<\log a=0.33<\log3$ ⇒ 表 x 是 2 開頭的數

$x=2\times\times\times$

(3)※

6、求動點P的軌跡 ⇒ 設 $P(x,y,z)$，依條件列式

P ①在 S 上

②滿足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=6$

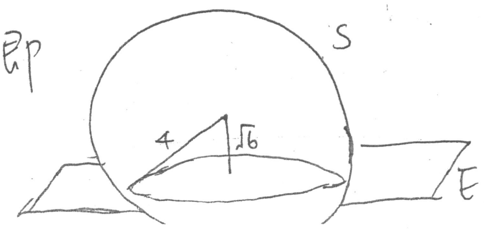
設 $P(x,y,z)$ ① $x^2+y^2+z^2=4^2$

② $x+2y+z=6$. (平面E)

$\overrightarrow{OA}=(1,2,1)$

$\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$ $\quad$ 球心到平面的距離 $=\frac{|-6|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt6}=\sqrt6<4$

即



⇒ 交於一圓

(4)※

長軸長

7、

$P_1:\ \dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1 \Rightarrow a=5$　　10

$P_2:\ \dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=2$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{2\cdot 5^2}+\dfrac{y^2}{2\cdot 3^2}=1 \Rightarrow a=\sqrt{2\cdot 5^2}=5\sqrt{2}$　　$10\sqrt{2}$

$P_3:\ \dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{2x}{5}+\dfrac{y^2}{3^2}=0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{5^2}(x^2-10x)+\dfrac{y^2}{3^2}=0$　　10

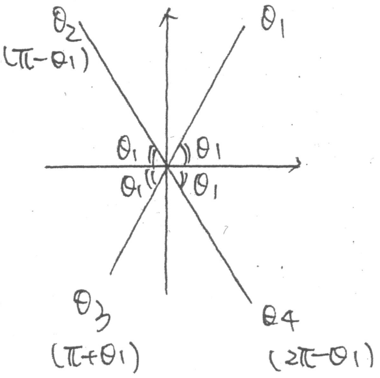
$\Rightarrow \dfrac{1}{5^2}\left[(x-5)^2-25\right]+\dfrac{y^2}{3}=0$

$\Rightarrow \dfrac{(x-5)^2}{5^2}-1+\dfrac{y^2}{3}=0$

$\Rightarrow \dfrac{(x-5)^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3}=1 \Rightarrow a=5$

$\therefore\ l_1=l_3<l_2$　　(4)#

8. 不論正負，四個象限之三角函數值均相同 ⇒ 與 x 軸夾角相同



(1) $\cos\theta_1=\dfrac{1}{3}$　$\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\because \dfrac{1}{3}<\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta_1>\dfrac{\pi}{4}$　(x)

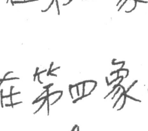
※ 在第一象限，正函數 ($\sin\theta, \tan\theta, \sec\theta$) ⇒ 角度愈大，其值愈

餘函數 ($\cos\theta, \cot\theta, \csc\theta$) ⇒ 角度愈大，其值愈小

(2) $\theta_2=\pi-\theta_1 \Rightarrow \theta_1+\theta_2=\pi$　(o)

(3) θ_3 在第三象限 ⇒ $\cos\theta$ 值為負　$\therefore \cos\theta_3=\dfrac{-1}{3}$ (o)

(4) θ_4 在第四象限 ⇒ $\sin\theta$ 值為負　$\therefore \sin\theta_4=\dfrac{-2\sqrt{2}}{3}$ (x)



(5) $\theta_4=\theta_3+\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow (2\pi-\theta_1)=(\pi+\theta_1)+\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\theta_1=\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta_1=\dfrac{\pi}{4}$ (x

(2)(3)#

9.

(1) 三次方程式的解 $\begin{cases} ① \text{ 三實根} \\ ② \text{ 一實根兩虛根} \end{cases}$ ⇒ 必有實根 (○)

(2) $2^x+2^{-x} \geq 2$ ∴ $2^x+2^{-x}=0$ 無實數解 (×)

(∵ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 算幾不等式

$\frac{2^x+2^{-x}}{2} \geq \sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} \Rightarrow \frac{2^x+2^{-x}}{2} \geq \sqrt{1} \Rightarrow 2^x+2^{-x} \geq 2$)

(3) 令 $t=\log_2 x \Rightarrow \log_x 2=\frac{1}{t}$

原式 ⇒ $t+\frac{1}{t}=1 \Rightarrow t^2+1=t \Rightarrow t^2-t+1=0$.

$\Rightarrow t=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}$ ⇒ t 無實數解 ⇒ x 無實數解 (×)

(4)

$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \sin x+\cos 2x \leq 2$

$-1 \leq \cos 2x \leq 1$ ∴ $\sin x+\cos 2x=3$ 無實數解 (×)

(5) 疊合公式：$|a\sin x+b\cos x| \leq \sqrt{a^2+b^2}$

$|4\sin x+3\cos x| \leq \sqrt{4^2+3^2}=5$

$\frac{9}{2}<5$ ⇒ 有實數解 (○)

(1)(5)\#

10、

由選項(4)、(5)可猜測 a_{n+2} 和 a_n 有關係.

原式：$a_{n+1}=\frac{n(n+1)}{2}-a_n$ —— ①

$n=n+1$ 代入 ⇒ $a_{n+2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}-a_{n+1}$ —— ②

① 代入 ② ⇒ $a_{n+2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\left[\frac{n(n+1)}{2}-a_n\right]=\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}+a_n$

$\Rightarrow a_{n+2}=\frac{(n+1)\cdot 2}{2}+a_n \Rightarrow a_{n+2}=(n+1)+a_n \Rightarrow a_{n+2}-a_n=(n+1)$

(1) $n=1$ 代入關係式 ⇒ $a_2=\frac{1\times 2}{2}-a_1=1-1=0$ (×)

(2)

$\frac{n(n+1)}{2}$ 必是整數（∵ n和 n+1 必一奇一偶）

∴若 a_n 是整數 ⇒ $\frac{n(n+1)}{2}-a_n=a_{n+1}$ 必是整數 (o)

(3) 若 a_1 是無理數 ⇒ $\frac{n(n+1)}{2}-a_1=a_2$ ⇒必是無理數.

整數－無理數

… 依此類推 ⇒ $\frac{n(n+1)}{2}-a_n=a_{n+1}$ ⇒必是無理數. (o)

整數－無理數＝無理數

(4) $a_{n+2}-a_n=n+1$，也就是 $a_4-a_2=3$

$a_6-a_4=5$

⋮

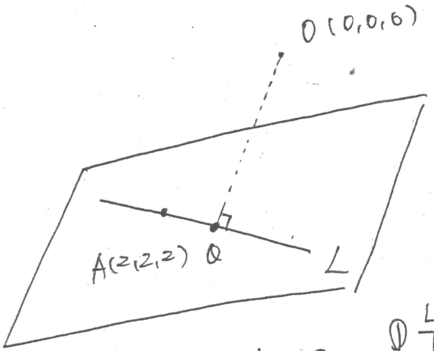
⇒ $a_2\le a_4\le\cdots\le a_{2n}\le\cdots$ (o)

(5) a_k 是奇數 ⇒ $a_{k+2}-a_k=k+1$ ⇒ $a_{k+2}=a_k+(k+1)$

若 k 是偶數 ⇒ k+1 是奇數 ⇒ $\underset{奇}{a_k}+\underset{奇}{(k+1)}$ = 偶數 = a_{k+2} (×)

(2)(3)(4)*

11.



$2x-y=2$

∵ Q是 O 在 L 上之投影點

∴ ① Q在L上 ⇒ Q在E: $2x-y=2$ 上.

② $\overline{OQ}\perp L$ ⇒ $\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{AQ}$

①先檢查Q是否在平面E上.

(1) $2\times2-2=2$（符合）

(2) $2\times2-0=4\ne2$（不合）

(3) $2\times\frac{4}{5}-(\frac{-2}{5})=\frac{10}{5}=2$（符合）

(4) $2\times\frac{4}{5}-(\frac{-2}{5})=\frac{10}{5}=2$（符合）

(5) $2\times\frac{8}{9}-(\frac{-2}{9})=\frac{18}{9}=2$（符合）

② 檢查 $\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{AQ}$ 是否成立.

(1) $(2,2,2)\cdot(0,0,0)=0$ (O)

(3) $(\frac{4}{5},\frac{-2}{5},0)\cdot(\frac{-6}{5},\frac{-12}{5},-2)=\frac{-24}{5}+\frac{24}{5}=0$ (O)

(4) $(\frac{4}{5},\frac{-2}{5},-2)\cdot(\frac{-6}{5},\frac{-12}{5},-4)=\frac{-24}{5}+\frac{24}{5}+8\neq 0$ (X)

(5) $(\frac{8}{9},\frac{-2}{9},\frac{-2}{9})\cdot(\frac{-10}{9},\frac{-20}{9},\frac{-20}{9})=\frac{-80}{81}+\frac{40}{81}+\frac{40}{81}=0$ (O)

(1)(3)(5) #

12、

(1) 抽樣不可取代全體 (X)

(2) 95% 信心水準下之信賴區間 $\left[\hat{p}-2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p}+2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$

$\Rightarrow [0.52-2\times0.02,\ 0.52+2\times0.02]=[0.48,\ 0.56]$ (O)

(3) 誤差愈小 ⇒ 抽樣人數愈多 (X)

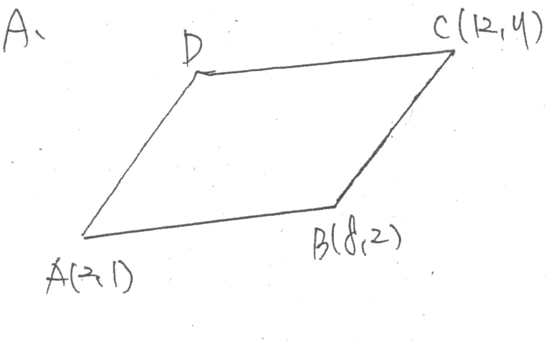
(4) 資料合併的平均,介於兩組資料之平均間. (O)

(5) 人數愈多 ⇒ 誤差愈小, 合併後之標準差應小於 0.02 (X)

(2)(4) #

貳、選填題

A、



設 D(12,y) (y>0)

平行四邊形 ABCD 面積 $=\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{BA}\\ \overrightarrow{BC}\end{vmatrix}\right|$

$=\left|\begin{vmatrix}-6 & -1\\ 4 & y-2\end{vmatrix}\right|$ $\quad \overrightarrow{BA}=(-6,-1)$, $\overrightarrow{BC}=(4,y-2)$

$=|-6(y-2)+4|=38$

$\Rightarrow -6(y-2)+4=\pm38 \Rightarrow -6(y-2)=34$ or -42 $\Rightarrow y-2=\frac{-17}{3}$ or 7

$\Rightarrow y=\frac{-11}{3}$ or 9 (取正) ⇒ 又 $\underline{A+C=B+D}$ $\Rightarrow D=A+C-B=(6,8)$

平行四邊形, 求坐標.

(6,8) #

B、 $f(x)$ 是實係數多項式 ⇒ 虛根共軛

∴ $f(x)$ 有根 $3-2i, 3+2i, i, -i, 5$

⇒ $f(x)$ 有因式 $(x-(3-2i)), (x-(3+2i)), (x-i), (x+i), (x-5)$

$f(x)$ 是滿足條件之最低次多項式且最高次係數為 1.

∴ $f(x) = (x-(3-2i))(x-(3+2i))(x-i)(x+i)(x-5)$

⇒ $f(x)$ 之常數項 $= f(0) = (-3+2i)(-3-2i)(-i)(i)(-5)$

$= [(-3)^2-(2i)^2](-i^2)\cdot(-5)$

$= 13\times 1\times(-5) = -65$

$\underline{-65}$ #

C、 先填入 1 ⇒ 有 6 個選擇.

再填入 2 ⇒ 有 3 個選擇（同列 2 個位置、同行 1 個位置）

剩下的 3, 4, 5, 6 ⇒ $4!$

∴ $6\times 3\times 4! = 18\times 24 = 432$

$\underline{432}$ #

D、 先找出 $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x-2y=a \end{cases}$ 的解

$\begin{cases} 2x-y=1 & —① \\ x-2y=a & —② \end{cases}$

① − ② × 2 ⇒ $3y = 1-2a$ ⇒ $y = \frac{1-2a}{3}$

① × 2 − ② ⇒ $3x = 2-a$ ⇒ $x = \frac{2-a}{3}$

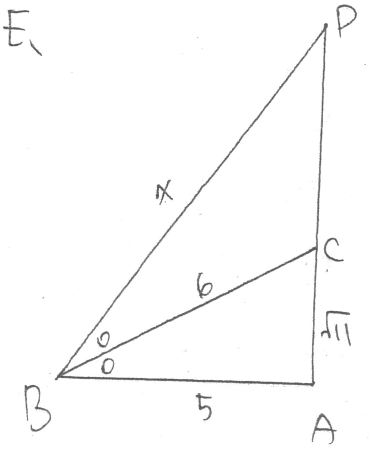
$\left(\frac{2-a}{3}, \frac{1-2a}{3}\right)$ 必在 $x-ay=122$ 上 ⇒ $\frac{2-a}{3} - a\left(\frac{1-2a}{3}\right) = 122$

∴ $2-a-a(1-2a)=366$ ⇒ $2-a-a+2a^2=366$ ⇒ $2a^2-2a-364=0$

⇒ $a^2-a-182=0$ ⇒ $(a-14)(a+13)=0$ ⇒ $a=14$ or -13（取正）

$\underline{14}$ #

E、



設 $\overline{BD} = x$

$\Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{x^2 - 5^2} \Rightarrow \overline{CD} = \sqrt{x^2-25} - \sqrt{11}$

∵ BC 是 ∠ABD 之角平分線

$\therefore \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \Rightarrow \dfrac{5}{x} = \dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{x^2-25}-\sqrt{11}}$

$\Rightarrow 5\sqrt{x^2-25} - 5\sqrt{11} = x\sqrt{11}$

$\Rightarrow 5\sqrt{x^2-25} = \sqrt{11}(x+5)$

平方 $\Rightarrow 25(x^2-25) = 11(x^2+10x+25)$

$\Rightarrow 25x^2 - 625 = 11x^2 + 110x + 275$

$\Rightarrow 14x^2 - 110x - 900 = 0$

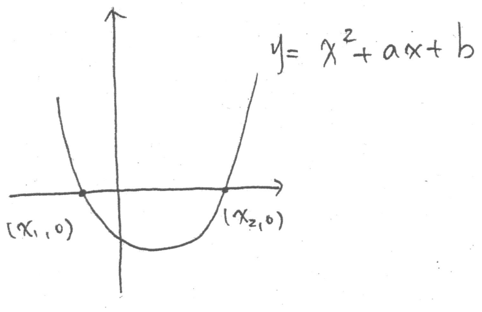
$\Rightarrow 7x^2 - 55x - 450 = 0$

$\Rightarrow (7x-90)(x+5) = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{90}{7}$ or -5 (取正)

$\dfrac{90}{7}$ #

F、

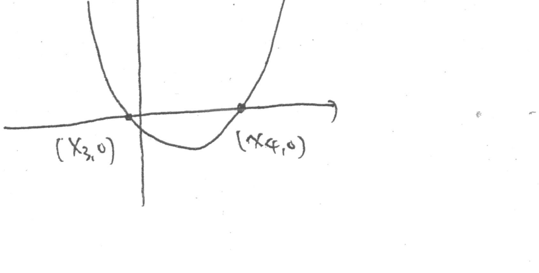


設 $y = x^2+ax+b$ 與 x軸交於 $(x_1,0)$, $(x_2,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2 = -a \\ x_1 \cdot x_2 = b \end{cases}$

$|x_1-x_2| = \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{a^2-4b} = 7$

$\therefore a^2-4b = 49$



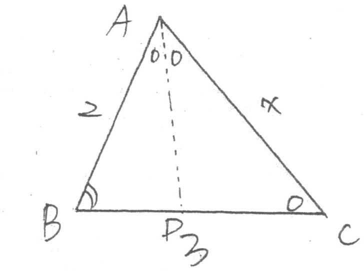
設 $y = x^2+ax+(b+2)$ 與 x軸交於 $(x_3,0)$, $(x_4,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} x_3+x_4 = -a \\ x_3 \cdot x_4 = b+2 \end{cases}$

$|x_3-x_4| = \sqrt{(x_3+x_4)^2 - 4x_3x_4} = \sqrt{a^2-4b-8} = \sqrt{41}$

$\sqrt{41}$ #

G.



設 $\overline{AC}=x$，作 $\angle A$ 之角平分線 $\overline{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D.

$\because \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \Rightarrow \overline{BD}=\dfrac{2}{2+x}\cdot 3 \quad \overline{CD}=\dfrac{x}{2+x}\cdot 3$

又 $\overline{AD}=\overline{CD}=\dfrac{3x}{2+x}$

$$\cos B=\frac{2^2+\left(\frac{6}{2+x}\right)^2-\left(\frac{3x}{2+x}\right)^2}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{6}{2+x}}=\frac{2^2+3^2-x^2}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 3}$$

$$\Rightarrow \frac{4(2+x)^2+6^2-(3x)^2}{2\cancel{6}(2+x)}=\frac{4+9-x^2}{\cancel{3}}$$

$$\Rightarrow 4(4+4x+x^2)+36-9x^2=2(2+x)(13-x^2)$$

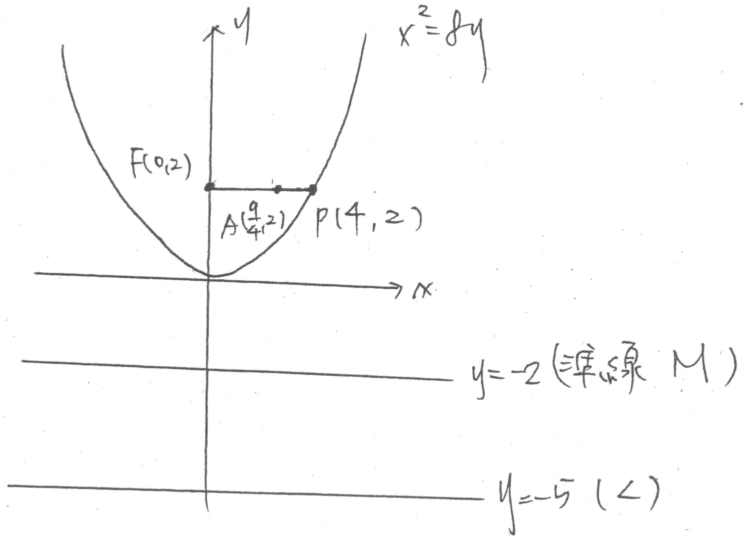
$$\Rightarrow 16+16x+4x^2+36-9x^2=2(26-2x^2+13x-x^3)$$

$$\Rightarrow 2x^3-x^2-10x=0 \Rightarrow 2x^2-x-10=0$$

$$\Rightarrow (2x-5)(x+2)=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \text{ or } -2 \text{ (取正)}$$

$\dfrac{5}{2}$ #

H. 與圓錐曲線相關 ⇒ 定義式（常用）



$d(P,L)=d(P,M)+3$

又拋物線定義 $d(P,M)=\overline{PF}$

$\therefore |d(P,L)-\overline{AP}|$

$=|\overline{PF}-\overline{AP}+3|$

如圖最大值發生在 P(4,2)

$\Rightarrow$ 所求 $=\left|\dfrac{9}{4}+3\right|=\dfrac{21}{4}$

$\dfrac{21}{4}$ #