龍騰文化

108 學年度學科能力測驗全真模擬試卷

數學考科

【教師解答卷】

桃園高中／陳清風

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：

第壹部分

- 單選題，共 7 題。
- 多選題，共 5 題。

第貳部分

- 選填題，共 8 題。

作答方式：

- 請在「答案卷」上作答，務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。更正時，可以使用修正液（帶）。

祝考試順利

龍騰文化

第壹部分：選擇題（占 60 分）

一、單選題（占 35 分）

說明：第 1 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請標示在答案卷之「解答欄」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 三年一班段考的成績，女生平均80分，男生平均64分，全班總平均73分，請問：三年一班可能有多少人?

(1) 30 人　(2) 32 人　(3) 36 人　(4) 40 人　(5) 42 人．

參考答案：(2)

命題出處：第一冊　第一章　數與式

試題解析：設女生有 n 人，男生有 m 人．依題意，得

$$\frac{80n+64m}{n+m}=73,$$

整理得

$$80n+64m=73n+73m \Rightarrow 7n=9m.$$

得知 n 為 9 的倍數，可令 $n=9k$，其中 k 為正整數．

代入上式，得 $m=7k$．

因此，全班人數為 $n+m=16k$，即16的倍數．

在5個選項中，只有32是16的倍數，故選(2)．

2. 若三次多項式 $f(x)=ax^3-3x^2+bx-3$ 除以 $x+2$ 的餘式為15，則 $f(x)$ 除以 $5x-10$ 的餘式為何?

(1) -45　(2) -35　(3) -9　(4) -7　(5)條件不足，無法求得．

參考答案：(1)

命題出處：第一冊　第二章　多項式函數

試題解析：依題意，由餘式定理得知

$$f(-2)=-8a-12-2b-3=15,$$

整理得 $4a+b=-15$．

再由餘式定理，得 $f(x)$ 除以 $5x-10$ 的餘式為

$$f\left(\frac{10}{5}\right)=f(2)=8a-12+2b-3=2(4a+b)-15=-45.$$

故選(1)．

3. 坐標平面上，已知直線 $x=k$ 分別與 $y=\log_2 x$ ， $y=\log_2(x+3)$ 的圖形交於 A,B 兩點，且 $\overline{AB}=3$ ，則實數 k 的值為何?

(1)$\frac{2}{3}$ (2)$\frac{3}{5}$ (3)$\frac{3}{7}$ (4)1 (5)$\frac{3}{2}$.

參考答案：(3)

命題出處：第一冊　第三章　指數、對數函數

試題解析：設 $A(k,\log_2 k)$， $B(k,\log_2(k+3))$. 因為 $\overline{AB}=3$，所以

$$\log_2(k+3)-\log_2 k=3 \text{ .}$$

利用對數律，得

$$\log_2\frac{k+3}{k}=3\Rightarrow\frac{k+3}{k}=8 \text{ .}$$

解得 $k=\frac{3}{7}$.

故選(3) .

4. 假設牧場的草，每星期成長的量一定，每頭牛每星期吃草的量相同，且牛邊吃草，草邊成長 . 已知 27 頭牛 6 星期可以吃完牧場的草，而 23 頭牛則須 9 星期才可以吃完 . 請問：若是 21 頭牛，則要多少星期才可吃完牧場的草?

(1)11 (2)12 (3)13 (4)14 (5)15 .

參考答案：(2)

命題出處：第二冊　第四章　數據分析

試題解析：設起初牧場草的量為 1，草每星期成長的量為 k ， 21 頭牛要 t 星期吃完 .

因為每頭牛每星期吃草的量相同，所以

$$\frac{1+6k}{27\times 6}=\frac{1+9k}{23\times 9}=\frac{1+tk}{21\times t} \text{ .}$$

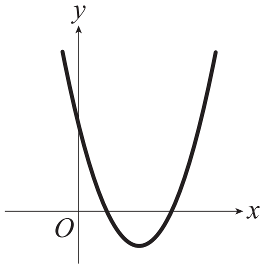
由前兩式，解得 $k=\frac{5}{24}$. 代入後兩式，得

$$\frac{1+9\times\frac{5}{24}}{23\times 9}=\frac{1+t\times\frac{5}{24}}{21\times t} \text{ ,}$$

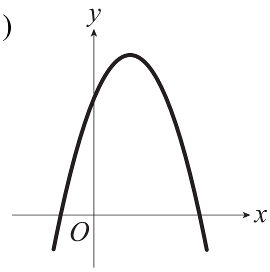
再解得 $t=12$.

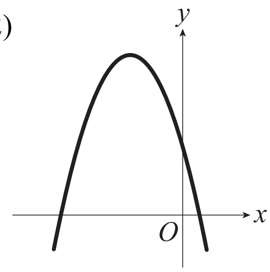
故選(2) .

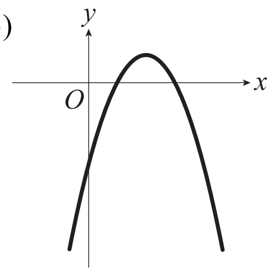
5. 已知二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形如下：

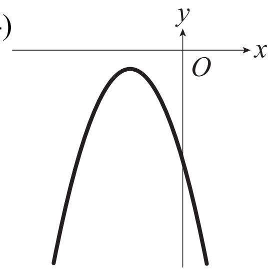


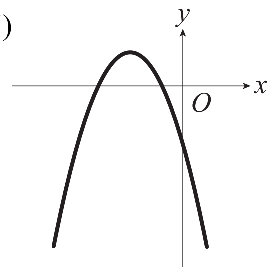
選出二次函數 $y=-ax^2+bx-c$ 的圖形．

(1)


(2)


(3)


(4)


(5)


參考答案：(5)

命題出處：第一冊　第二章　多項式函數

試題解析：由拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形，得知：

①因為開口向上，所以 $a>0$ ．

②因為對稱軸 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 在 y 軸右方，所以 $-\dfrac{b}{2a}>0$ ，得知 $b<0$ ．

③因為與 y 軸的交點 $(0,c)$ 在 x 軸的上方，所以 $c>0$ ．

④因為與 x 軸交兩點，所以判別式 $b^2-4ac>0$ ．

因此，推得拋物線 $y=-ax^2+bx-c$ 圖形有以下特徵：

①因為 $-a<0$ ，所以開口向下．

②因為 $-\dfrac{b}{2(-a)}=\dfrac{b}{2a}<0$ ，所以對稱軸在 y 軸左方．

③因為 $-c<0$ ，所以與 y 軸的交點 $(0,-c)$ 在 x 軸的下方．

④因為判別式 $b^2-4(-a)(-c)=b^2-4ac>0$ ，所以與 x 軸交兩點．

故選(5)．

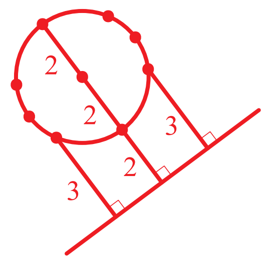
6. 坐標平面上，在圓 $C: x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 上，有幾個點到直線 $L: 3x-4y-9=0$ 的距離恰好是整數?

(1) 0　(2) 7　(3) 8　(4) 9　(5)無限多個．

參考答案：(3)

命題出處：第三冊　第二章　直線與圓

試題解析：將圓 C 化為標準式，得



$$(x+1)^2+(y-2)^2=4\ .$$

因此，其圓心為 $(-1,2)$，半徑為 2．

因為圓心 $(-1,2)$ 到直線 L 的距離為

$$d=\frac{|3\times(-1)-4\times 2-9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{20}{5}=4\ ,$$

所以圓 C 上的點到直線 L 最遠的距離為 $4+2=6$，最近的距離為 $4-2=2$．

因此，恰好是整數的距離有 $2,3,4,5,6$，其中 $2,6$ 各一點，$3,4,5$ 各二點，如圖所示，即距離恰好是整數的點有 $2\times1+3\times2=8$ 個．

故選(3)．

7. 設拋物線 $y^2=4x$ 的焦點為 F，準線為 L．若通過 F 點且斜率為 $\sqrt{3}$ 的直線與拋物線在 x 軸上方的部分相交於 A 點，過 A 點作 L 的垂線，垂足為 H，則 $\triangle AHF$ 的面積為何?

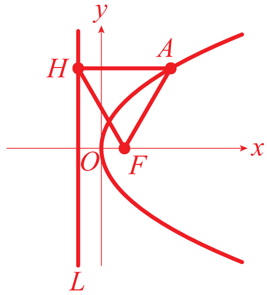
(1) 5　(2) $3\sqrt{3}$　(3) 6　(4) $4\sqrt{3}$　(5) $6\sqrt{3}$．

參考答案：(4)

命題出處：第四冊　第四章　二次曲線

試題解析：因為 $y^2=4\cdot1\cdot x$，所以焦點 $F(1,0)$，準線 $L: x=-1$．

通過 $F(1,0)$ 且斜率為 $\sqrt{3}$ 的直線方程式為



$$y-0=\sqrt{3}(x-1)\text{，即 } y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}\ .$$

解 $\begin{cases} y^2=4x \\ y=\sqrt{3}x-\sqrt{3} \end{cases}$

消去 y，得

$$\left(\sqrt{3}x-\sqrt{3}\right)^2=4x \Rightarrow 3x^2-10x+3=0\ ,$$

解得 $x=3,\frac{1}{3}$．依題意，得 $A\left(3,2\sqrt{3}\right)$．

因為 $\overline{AH}=3+1=4$，所以 $\triangle AHF$ 的面積為 $\frac{4\times2\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$．

故選(4)．

二、多選題（占 25 分）

說明：第 8 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項標示在答案卷之「解答欄」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

8. 選出填入□內可使不等式 $\dfrac{3}{\square-2}>\square$ 成立的選項．

(1) $-\dfrac{25}{23}$　(2) $\sqrt{13}$　(3) $\sqrt[3]{25}$　(4) π　(5) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ．

參考答案：(1)(3)

命題出處：第一冊　第二章　多項式函數

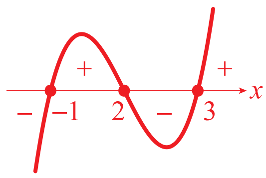
試題解析：題意就是解不等式 $\dfrac{3}{x-2}>x$ ．

移項整理得 $\dfrac{3}{x-2}-x>0 \Rightarrow \dfrac{3-x(x-2)}{x-2}>0 \Rightarrow \dfrac{-x^2+2x+3}{x-2}>0$ ．

因此，$(-x^2+2x+3)(x-2)>0 \Rightarrow (x^2-2x-3)(x-2)<0$ ．

因式分解，得 $(x-3)(x+1)(x-2)<0$ ．

正負區間示意圖，如右：



得不等式的解為 $x<-1$ 或 $2<x<3$ ．

由於 5 個選項中，只有(1)(3)選項符合不等式的解，故選(1)(3)．

9. 設 a,b 為實數．關於聯立方程式 $\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ 2x+y-z=4 \\ 5x+ay+2z=b \end{cases}$ ，選出正確的選項．

(1)若此聯立方程式有解，則 $a\neq 7$　　(2)若此聯立方程式有解，則 $b=1$

(3)若 $a+b=8$，則此聯立方程式有無限多組解　　(4)若此聯立方程式無解，則 $a=7$

(5)若此聯立方程式無解，則 $b\neq 1$ ．

參考答案：(4)(5)

命題出處：第四冊　第二章　空間中的平面與直線

試題解析：令 $\begin{cases} x+2y+z=-1\cdots① \\ 2x+y-z=4\cdots② \\ 5x+ay+2z=b\cdots③ \end{cases}$ ，由 ①×2 −②，得 $3y+3z=-6\cdots④$，

由 ①×5 −③，得 $(10-a)y+3z=-5-b\cdots⑤$，由 ④−⑤，得 $(a-7)y=b-1$ ．

(i) 當 $a\neq 7$ 時，$y=\dfrac{b-1}{a-7}$，可得知恰一組解．

(ii)當 $a=7$ 時，$0y=b-1$ ．當 $b\neq 1$ 時，無解．當 $b=1$ 時，無限多組解．

根據上述聯立方程式解的討論，故選(4)(5)．

10. 空間中，平面 E 通過 $A(0,0,3)$ 與 $B(1,2,1)$ 兩點，且與直線 $L:\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z+2}{1}$ 平行，選出正確的選項．

(1)點 $(2,-4,5)$ 在平面 E 上

(2)平面 E 與 yz 平面垂直

(3)平面 E 與 xy 平面所夾的銳角小於 $60°$

(4)原點 O 到平面 E 的距離大於 3

(5)直線 L 與直線 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{3}$ 歪斜．

參考答案：(3)(5)

命題出處：第四冊　第二章　空間中的平面與直線

試題解析：設平面 E 的法向量為 $\overrightarrow{n}$ ．因為 $\overrightarrow{n}$ 是 $\overrightarrow{AB}$ 與 L 的方向向量 $\overrightarrow{v}$ 的公垂向量，所以取

$$\overrightarrow{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{v}=\left(\begin{vmatrix}2&-2\\4&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2&1\\1&-3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\-3&4\end{vmatrix}\right)=(10,5,10)\ .$$

又平面 E 通過點 $A(0,0,3)$，得平面 E 的方程式為

$$10x+5y+10z=30\Rightarrow 2x+y+2z=6\ .$$

(1)因為 $2\times2+(-4)+2\times5=10\neq6$，所以點 $(2,-4,5)$ 不在平面 E 上．

(2) yz 平面的法向量為 $(1,0,0)$ ．因為兩個法向量的內積 $(2,1,2)\cdot(1,0,0)=2\neq0$，所以平面 E 與 yz 平面不垂直．

(3) xy 平面的法向量為 $(0,0,1)$ ．兩法向量的夾角 θ 滿足

$$\cos\theta=\frac{2\times0+1\times0+2\times1}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\times\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{2}{3}\ .$$

因為 $\cos60°=\dfrac{1}{2}$，且 $\dfrac{2}{3}>\dfrac{1}{2}$，所以 $0°<\theta<60°$ ．

又因為平面 E 與 xy 平面的夾角為 θ 與 $180°-\theta$，

所以平面 E 與 xy 平面所夾的銳角 θ 小於 $60°$ ．

(4)利用點到平面的距離公式，得

$$d=\frac{|2\times0+0+2\times0-6|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{6}{3}=2\ .$$

(5)因為兩個方向向量 $(-3,4,1)$ 與 $(1,-1,3)$ 不平行，所以兩直線交一點或歪斜．

設兩直線的交點為 $P(x,y,z)$ ．因為 P 在兩直線上，所以

$$\begin{cases}1-3t=-1+s\\2+4t=1-s\\-2+t=-2+3s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3t+s=2\cdots①\\4t+s=-1\cdots②\\t-3s=0\cdots③\end{cases}$$

由①②解得 $t=-3$，$s=11$，代入③不合，兩直線沒有交點，故兩直線歪斜．

故選(3)(5)．

11. 根據資料，全國薪資所得前10% 的平均是後10% 平均的36倍，貧富差距懸殊．事實上，一年多前，為了縮減貧富差距的倍數及年所得的標準差，學者曾建議政府底下三個方案：

甲方案：每人每月薪資加3000元；

乙方案：每人每月薪資加3%；

丙方案：薪資所得後10% 的人，每人每月發5000元．

選出正確的選項．

(1)若實施甲方案，則貧富差距的倍數會低於36倍

(2)若實施乙方案，則貧富差距的倍數仍是36倍

(3)若實施丙方案，則貧富差距的倍數會低於36倍

(4)若實施乙方案，則薪資所得的標準差會縮小為原標準差的97%

(5)若實施丙方案，則薪資所得的標準差會縮小．

參考答案：(1)(2)(3)(5)

命題出處：第二冊　第四章　數據分析

試題解析：設薪資所得後10% 的人，每人每月薪資 n 元，則前10% 的人，每人每月薪資 $36n$ 元．

(1)因為 $\dfrac{36n+3000}{n+3000}<\dfrac{36n}{n}=36$，所以正確．

(2)因為 $\dfrac{36n\times 103\%}{n\times 103\%}=36$，所以正確．

(3)因為 $\dfrac{36n}{n+5000}<\dfrac{36n}{n}=36$，所以正確．

(4)因為每人的薪資為原來的1.03倍，所以調薪後的標準差為原標準差的1.03倍．

(5)因為調薪後的薪資分布比原薪資分布集中，所以標準差會縮小．

故選(1)(2)(3)(5)．

12. 已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，且 $A^k=\begin{bmatrix}a_k & b_k\\c_k & d_k\end{bmatrix}$，其中 $k=1,2,\cdots$，選出正確的選項．

(1) $a_3=3$

(2) a_3,a_4,a_5 為等差數列

(3) b_3,b_4,b_5 為等差數列

(4) c_3,c_4,c_5 為等比數列

(5) d_3,d_4,d_5 為等比數列．

參考答案：(2)(5)

命題出處：第四冊　第三章　矩陣

試題解析：計算如下：

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{3}{2}\\0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix},$$

$$A^3=AA^2=\begin{bmatrix}1 & \frac{7}{4}\\0 & \frac{1}{8}\end{bmatrix},\quad A^4=AA^3=\begin{bmatrix}1 & \frac{15}{8}\\0 & \frac{1}{16}\end{bmatrix},\quad A^5=AA^4=\begin{bmatrix}1 & \frac{31}{16}\\0 & \frac{1}{32}\end{bmatrix}.$$

(1) $a_3=1$．

(2)因為 $a_3=1$，$a_4=1$，$a_5=1$ 滿足 $a_4-a_3=a_5-a_4$ 為等差數列．

(3)因為 $b_3=\frac{7}{4}$，$b_4=\frac{15}{8}$，$b_5=\frac{31}{16}$ 不滿足 $b_4-b_3=b_5-b_4$，所以不是等差數列．

(4)因為 $c_3=0$，$c_4=0$，$c_5=0$，所以不是等比數列．

(5)因為 $d_3=\frac{1}{8}$，$d_4=\frac{1}{16}$，$d_5=\frac{1}{32}$ 滿足 $\frac{d_4}{d_3}=\frac{d_5}{d_4}$，所以是等比數列．

故選(2)(5)．

第貳部分：選填題（占 40 分）

說明：1.第 A 至 H 題，將答案標示在答案卷之「解答欄」所標示的列號（⑬～㉟）。
2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 從 n 個連續正整數 1，2，…，n 中，一次任意取出兩個不同的數．已知取出兩數的和為 5 之機率為 $\dfrac{1}{14}$，求 $n=$ ＿⑬＿．

參考答案：8

命題出處：第二冊　第三章　機率

試題解析：因為 $5=1+4=2+3$，所以由機率的定義，得

$$\frac{2}{C_2^n}=\frac{1}{14}\Rightarrow C_2^n=28,$$

即 $\dfrac{n(n-1)}{2}=28\Rightarrow n(n-1)=56$．

解得 $n=8$．

B. 如右圖，每一層由左到右都是首項為 1，公比為 2 的等比數列，往下排到第 10 層，請問：全部 10 層的數字總和為 ＿⑭⑮⑯⑰＿．

第1層	1	2			
第2層	1	2	2^2		
第3層	1	2	2^2	2^3	
第4層	1	2	2^2	2^3	2^4

參考答案：4082

命題出處：第二冊　第一章　數列與級數

試題解析：利用等比級數求和公式，得所求為

$$(1+2)+\left(1+2+2^2\right)+\cdots+\left(1+2+2^2+\cdots+2^{10}\right)$$

$$=\frac{1\times\left(1-2^2\right)}{1-2}+\frac{1\times\left(1-2^3\right)}{1-2}+\cdots+\frac{1\times\left(1-2^{11}\right)}{1-2}$$

$$=\left(2^2-1\right)+\left(2^3-1\right)+\cdots+\left(2^{11}-1\right)$$

$$=\left(2^2+2^3+\cdots+2^{11}\right)-10$$

$$=\frac{2^2\times\left(1-2^{10}\right)}{1-2}-10$$

$$=2^2\times\left(2^{10}-1\right)-10=4082.$$

C. 某醫院要在 7 天內派人到 4 個社區體檢，每天只安排一個社區，其中一個社區人數較多要連續體檢 2 天，其餘 3 個社區均只須1天，則共有＿⑱⑲⑳＿種安排方法．

參考答案：360

命題出處：第二冊　第二章　排列、組合

試題解析：設 4 社區為甲乙丙丁，且甲要連續體檢 2 天，○表當天排空，不體檢．

依題意，安排方法相當於將

$\boxed{\text{甲甲}}$乙丙丁○○

任意排成一列的方法數，共有 $\dfrac{6!}{2!}=360$ 種．

D. 已知不等式組 $\begin{cases}3x+4y-12\ge 0\\ x\le 5\\ y\le 4\end{cases}$ 表示區域 D．過區域 D 中任一點 P 作圓 $x^2+y^2=1$ 的兩條切線，切點分別為 A,B．當 $\angle APB$ 最大時，求 $\cos\angle APB=$ $\dfrac{㉑㉒}{㉓㉔}$．

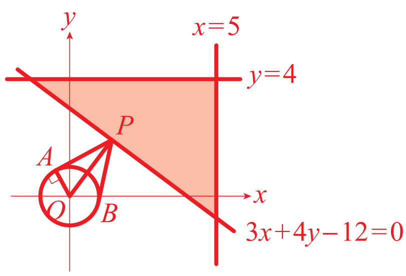
參考答案：$\dfrac{47}{72}$

命題出處：第三冊　第二章　直線與圓

試題解析：在所有直角三角形 OAP 中，$\overline{OA}$ 固定為1，斜邊 $\overline{OP}$ 愈小，$\angle APO$ 愈大．

因此，當 $\overline{OP}$ 最小時，$\angle APB=2\angle APO$ 最大，此時

$$\overline{OP}=\frac{|3\times 0+4\times 0-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{12}{5},$$



因此，$\sin\angle APO=\dfrac{5}{12}$．

利用二倍角公式，得

$$\cos\angle APB=1-2\sin^2\angle APO$$
$$=1-2\left(\frac{5}{12}\right)^2=\frac{47}{72}.$$

E. 某商人販賣的紅豆分成特、優與良三種等級，定價如下表：

等級 單價	特	優	良
每公斤	50元	40元	30元

某一週，商人將取得的特級紅豆 500 公斤、優級紅豆 1000 公斤與良級紅豆 1500 公斤，採取如下的「魚目混珠」策略出售：

將特級、優級、良級以 1:1:1 的比例混合後，以特級的價格銷售；

將特級、優級、良級以 1:2:2 的比例混合後，以優級的價格銷售；

將優級、良級以 1:3 的比例混合後，以良級的價格銷售．

若這週取得的紅豆都用上述的策略全部賣出，則該商人可多賺 ㉕㉖㉗㉘ 元．

參考答案：7500

命題出處：第四冊　第二章　空間中的平面與直線

試題解析：設三種策略中的良級紅豆重量分別為 $a, 2b, 3c$ 公斤．依題意，得

$$\begin{cases} a+b=500 \\ a+2b+c=1000 \\ a+2b+3c=1500 \end{cases},$$

解得 $a=b=c=250$．

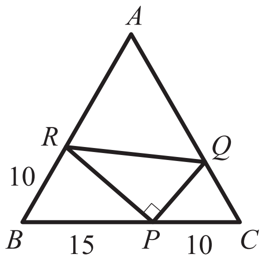
因此混合後的特級紅豆 750 公斤、優級紅豆 1250 公斤、良級紅豆 1000 公斤，

故商人可多賺

$$(750\times 50+1250\times 40+1000\times 30)-(500\times 50+1000\times 40+1500\times 30)$$

$$=117500-110000=7500 \text{（元）}.$$

F. 如圖，$\triangle ABC$ 為正三角形，$\triangle PQR$ 為直角三角形，已知 $\overline{BP}=15$，$\overline{BR}=\overline{PC}=10$，求 $\overline{CQ}=$ ___㉙___ .



參考答案：8

命題出處：第三冊　第一章　三角

試題解析：設 $\overline{CQ}=x$ ．因為 $\triangle ABC$ 是邊長為 25 的正三角形，所以 $\overline{AR}=15$， $\overline{AQ}=25-x$ ．

利用餘弦定理，得

$$\overline{PR}^2=10^2+15^2-2\cdot10\cdot15\cdot\cos60°=175,$$

$$\overline{PQ}^2=10^2+x^2-2\cdot10\cdot x\cdot\cos60°=x^2-10x+100,$$

$$\overline{QR}^2=15^2+(25-x)^2-2\cdot15\cdot(25-x)\cdot\cos60°=x^2-35x+475.$$

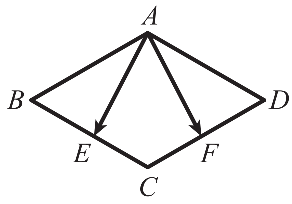
又因為 $\triangle PQR$ 為直角三角形，所以 $\overline{PR}^2+\overline{PQ}^2=\overline{RQ}^2$，即

$$175+x^2-10x+100=x^2-35x+475,$$

整理得 $25x=200$，解得 $x=8$ ．

故 $\overline{CQ}=8$ ．

G. 如右圖，菱形 $ABCD$ 的邊長為 2，$\angle BAD=120°$，點 E，F 分別在 $\overline{BC}$ 與 $\overline{DC}$ 上，已知 $\overrightarrow{BE}=k\overrightarrow{BC}$， $\overrightarrow{DF}=h\overrightarrow{DC}$， 內積 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=1$， $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}=-\dfrac{2}{3}$， 求 $h+k=$ $\dfrac{㉚}{㉛}$ 。



參考答案：$\dfrac{5}{6}$

命題出處：第三冊　第三章　平面向量

試題解析：因為

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}\right)=\left(\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+h\overrightarrow{DC}\right)$$
$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot h\overrightarrow{DC}+k\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+k\overrightarrow{BC}\cdot h\overrightarrow{DC}$$
$$=2\times2\times\cos120°+h\times2^2+k\times2^2+hk\times2\times2\times\cos120°$$
$$=-2+4h+4k-2hk，$$

所以 $-2+4h+4k-2hk=1$， 即 $4h+4k-2hk=3\cdots①$

又因為

$$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}=\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}\right)=\left(-\overrightarrow{BC}+k\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{DC}+h\overrightarrow{DC}\right)$$
$$=(k-1)\overrightarrow{BC}\cdot(h-1)\overrightarrow{DC}$$
$$=(k-1)(h-1)(2\times2\times\cos120°)$$
$$=-2hk+2h+2k-2，$$

所以 $-2hk+2h+2k-2=-\dfrac{2}{3}$， 即 $2hk-2h-2k=-\dfrac{4}{3}\cdots②$

由①+②， 得 $2h+2k=\dfrac{5}{3}$， 故 $h+k=\dfrac{5}{6}$ ．

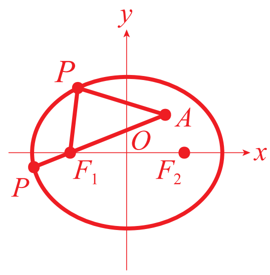
H. 已知 F_1， F_2 分別為橢圓 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 的左、右焦點， A 點的坐標為 $(2,2)$， P 為橢圓上一點，求 $\overline{PA}+\overline{PF_2}$ 最大值為 ㉜㉝ $+\sqrt{㉞㉟}$.

參考答案： $10+\sqrt{29}$

命題出處：第四冊　第四章　二次曲線

試題解析：由橢圓 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 得 $a=5$， $b=4$，再由 $a^2=b^2+c^2$，得 $c=3$.

因此， $F_1(-3,0)$， $F_2(3,0)$.



根據橢圓的定義， $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a=10$，

因此

$$\overline{PA}+\overline{PF_2}=\overline{PA}+10-\overline{PF_1}=10+\left(\overline{PA}-\overline{PF_1}\right) .$$

(1)當 P,F_1,A 三點不共線時：

$\overline{PA}-\overline{PF_1}<\overline{AF_1}$ （三角形兩邊之差必小於第三邊），

(2)當 P,F_1,A 三點共線，且 $\overline{PA}>\overline{PF_1}$ 時：

$\overline{PA}-\overline{PF_1}=\overline{AF_1}$.

(3)當 P,F_1,A 三點共線且 $\overline{PA}<\overline{PF_1}$ 時，

$\overline{PA}-\overline{PF_1}=-\overline{AF_1}$.

故 $\overline{PA}+\overline{PF_2}$ 最大值為 $10+\overline{AF_1}=10+\sqrt{29}$.

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{n\left(2a+(n-1)d\right)}{2}$

   首項為 a，公比為 r（$r\neq 1$）的等比數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

   $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑）

   $\triangle ABC$ 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

4. 一維數據 X：$x_1,x_2,\cdots,x_n$，算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

   標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu_X\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2\right)-n{\mu_X}^2\right)}$

5. 二維數據 (X,Y)：$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu_X\right)\left(y_i-\mu_Y\right)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   迴歸直線（最適合直線）方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}\left(x-\mu_X\right)$

6. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{5}\approx 2.236$，$\sqrt{6}\approx 2.449$，$\pi\approx 3.142$

7. 對數值：$\log_{10}2\approx 0.3010$，$\log_{10}3\approx 0.4771$，$\log_{10}5\approx 0.6990$，$\log_{10}7\approx 0.8451$

龍騰文化

108 學年度學科能力測驗全真模擬試卷

數學考科　解答卷

■答案

第壹部分：選擇題

一、單選題

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
2	1	3	2	5	3	4

二、多選題

8.	9.	10.	11.	12.
13	45	35	1235	25

第貳部分：選填題

13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.	31.	32.
8	4	0	8	2	3	6	0	4	7	7	2	7	5	0	0	8	5	6	1
33.	34.	35.																	
0	2	9																	

■解析

1. 設女生有 n 人，男生有 m 人．依題意，得

$$\frac{80n+64m}{n+m}=73,$$

整理得 $80n+64m=73n+73m \Rightarrow 7n=9m$ ．

得知 n 為 9 的倍數，可令 $n=9k$，其中 k 為正整數．

代入上式，得 $m=7k$ ．

因此，全班人數為 $n+m=16k$，即 16 的倍數．

在 5 個選項中，只有 32 是 16 的倍數，故選(2)．

2. 依題意，由餘式定理得知

$$f(-2)=-8a-12-2b-3=15,$$

整理得 $4a+b=-15$ ．

再由餘式定理，得 $f(x)$ 除以 $5x-10$ 的餘式為

$$f\left(\frac{10}{5}\right)=f(2)=8a-12+2b-3$$

$$=2(4a+b)-15=-45 .$$

故選(1)．

3. 設 $A(k,\log_2 k)$， $B(k,\log_2(k+3))$ ．

因為 $\overline{AB}=3$，所以 $\log_2(k+3)-\log_2 k=3$ ．

利用對數律，得 $\log_2\frac{k+3}{k}=3 \Rightarrow \frac{k+3}{k}=8$ ．

解得 $k=\frac{3}{7}$ ．故選(3)．

4. 設起初牧場草的量為 1，草每星期成長的量為 k，21 頭牛要 t 星期吃完．

因為每頭牛每星期吃草的量相同，所以

$$\frac{1+6k}{27\times 6}=\frac{1+9k}{23\times 9}=\frac{1+tk}{21\times t} .$$

由前兩式，解得 $k=\frac{5}{24}$ ．代入後兩式，得

$$\frac{1+9\times\frac{5}{24}}{23\times 9}=\frac{1+t\times\frac{5}{24}}{21\times t},$$

再解得 $t=12$ ．故選(2)．

5. 由拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形，得知：

① 因為開口向上，所以 $a>0$ ．

② 因為對稱軸 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 在 y 軸右方，

所以 $-\dfrac{b}{2a}>0$ ，得知 $b<0$ ．

③ 因為與 y 軸的交點 $(0,c)$ 在 x 軸的上方，

所以 $c>0$ ．

④ 因為與 x 軸交兩點，所以判別式 $b^2-4ac>0$ ．

因此，推得拋物線 $y=-ax^2+bx-c$ 圖形有以下特徵：

① 因為 $-a<0$ ，所以開口向下．

② 因為 $-\dfrac{b}{2(-a)}=\dfrac{b}{2a}<0$ ，所以對稱軸在 y 軸左方．

③ 因為 $-c<0$ ，所以與 y 軸的交點 $(0,-c)$ 在 x 軸的下方．

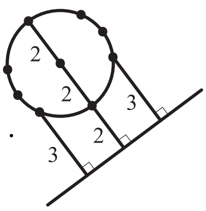
④ 因為判別式 $b^2-4(-a)(-c)=b^2-4ac>0$ ，

所以與 x 軸交兩點．

故選(5)．

6. 將圓 C 化為標準式，得

$$(x+1)^2+(y-2)^2=4 \text{ ．}$$



因此，其圓心為 $(-1,2)$ ，半徑為 2 ．

因為圓心 $(-1,2)$ 到直線 L 的距離為

$$d=\frac{|3\times(-1)-4\times2-9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{20}{5}=4 \text{ ，}$$

所以圓 C 上的點到直線 L 最遠的距離為 $4+2=6$ ，最近的距離為 $4-2=2$ ．

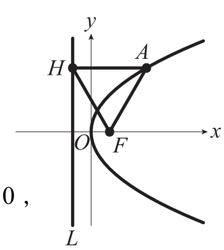
因此，恰好是整數的距離有 2,3,4,5,6 ，其中 2,6 各一點， 3,4,5 各二點，如圖所示，即距離恰好是整數的點有 $2\times1+3\times2=8$ 個．

故選(3)．

7. 因為 $y^2=4\cdot1\cdot x$ ，所以焦點 $F(1,0)$ ，準線 $L: x=-1$ ．

通過 $F(1,0)$ 且斜率為 $\sqrt{3}$ 的直線方程式為

$$y-0=\sqrt{3}(x-1) \text{，即 } y=\sqrt{3}x-\sqrt{3} \text{ ．}$$



解 $\begin{cases} y^2=4x \\ y=\sqrt{3}x-\sqrt{3} \end{cases}$

消去 y ，得

$(\sqrt{3}x-\sqrt{3})^2=4x \Rightarrow 3x^2-10x+3=0$ ，

解得 $x=3,\dfrac{1}{3}$ ．依題意，得 $A(3,2\sqrt{3})$ ．

因為 $\overline{AH}=3+1=4$ ，

所以 $\triangle AHF$ 的面積為 $\dfrac{4\times2\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$ ．故選(4)．

8. 題意就是解不等式 $\dfrac{3}{x-2}>x$ ．

移項整理得

$$\frac{3}{x-2}-x>0 \Rightarrow \frac{3-x(x-2)}{x-2}>0 \Rightarrow \frac{-x^2+2x+3}{x-2}>0 \text{ ．}$$

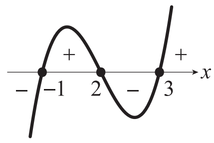
因此，

$(-x^2+2x+3)(x-2)>0 \Rightarrow (x^2-2x-3)(x-2)<0$ ．

因式分解，

得 $(x-3)(x+1)(x-2)<0$ ．

正負區間示意圖，如右：



得不等式的解為 $x<-1$ 或 $2<x<3$ ．

由於 5 個選項中，只有(1)(3)選項符合不等式的解，故選(1)(3)．

9. 令 $\begin{cases} x+2y+z=-1\cdots① \\ 2x+y-z=4\cdots② \\ 5x+ay+2z=b\cdots③ \end{cases}$ ，

由 ①×2−② ，得 $3y+3z=-6\cdots$④ ，

由 ①×5−③ ，得 $(10-a)y+3z=-5-b\cdots$⑤ ，

由 ④−⑤ ，得 $(a-7)y=b-1$ ．

(i) 當 $a\neq7$ 時， $y=\dfrac{b-1}{a-7}$ ，可得知恰一組解．

(ii) 當 $a=7$ 時， $0y=b-1$ ．當 $b\neq1$ 時，無解．

當 $b=1$ 時，無限多組解．

根據上述聯立方程式解的討論，故選(4)(5)．

10. 設平面 E 的法向量為 $\overrightarrow{n}$ ．

因為 $\overrightarrow{n}$ 是 $\overrightarrow{AB}$ 與 L 的方向向量 $\overrightarrow{v}$ 的公垂向量，所以取

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n}&=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{v}\\&=\left(\begin{vmatrix}2&-2\\4&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2&1\\1&-3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\-3&4\end{vmatrix}\right)\\&=(10,5,10) \text{ ．}\end{aligned}$$

又平面 E 通過點 $A(0,0,3)$ ，得平面 E 的方程式為

$$10x+5y+10z=30 \Rightarrow 2x+y+2z=6 \text{ ．}$$

(1) 因為 $2\times2+(-4)+2\times5=10\neq6$ ，

所以點 $(2,-4,5)$ 不在平面 E 上．

(2) yz 平面的法向量為 $(1,0,0)$ ．

因為兩個法向量的內積 $(2,1,2)\cdot(1,0,0)=2\neq0$ ，

所以平面 E 與 yz 平面不垂直．

(3) xy 平面的法向量為 $(0,0,1)$.

兩法向量的夾角 θ 滿足

$$\cos\theta=\frac{2\times0+1\times0+2\times1}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\times\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{2}{3}.$$

因為 $\cos60^\circ=\frac{1}{2}$，且 $\frac{2}{3}>\frac{1}{2}$，所以 $0^\circ<\theta<60^\circ$.

又因為平面 E 與 xy 平面的夾角為 θ 與 $180^\circ-\theta$，

所以平面 E 與 xy 平面所夾的銳角 θ 小於 60° .

(4) 利用點到平面的距離公式，得

$$d=\frac{|2\times0+0+2\times0-6|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{6}{3}=2.$$

(5) 因為兩個方向向量 $(-3,4,1)$ 與 $(1,-1,3)$ 不平行，

所以兩直線交一點或歪斜 .

設兩直線的交點為 $P(x,y,z)$.

因為 P 在兩直線上，所以

$$\begin{cases}1-3t=-1+s\\2+4t=1-s\\-2+t=-2+3s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3t+s=2\cdots①\\4t+s=-1\cdots②\\t-3s=0\cdots③\end{cases}$$

由①②解得 $t=-3$，$s=11$，代入③不合，

兩直線沒有交點，故兩直線歪斜 .

故選(3)(5) .

11. 設薪資所得後 10% 的人，每人每月薪資 n 元，

則前 10% 的人，每人每月薪資 $36n$ 元 .

(1) 因為 $\frac{36n+3000}{n+3000}<\frac{36n}{n}=36$，所以正確 .

(2) 因為 $\frac{36n\times103\%}{n\times103\%}=36$，所以正確 .

(3) 因為 $\frac{36n}{n+5000}<\frac{36n}{n}=36$，所以正確 .

(4) 因為每人的薪資為原來的 1.03 倍，

所以調薪後的標準差為原標準差的 1.03 倍 .

(5) 因為調薪後的薪資分布比原薪資分布集中，

所以標準差會縮小 .

故選(1)(2)(3)(5) .

12. 計算如下：

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\frac{3}{2}\\0&\frac{1}{4}\end{bmatrix},$$

$$A^3=AA^2=\begin{bmatrix}1&\frac{7}{4}\\0&\frac{1}{8}\end{bmatrix},\quad A^4=AA^3=\begin{bmatrix}1&\frac{15}{8}\\0&\frac{1}{16}\end{bmatrix},$$

$$A^5=AA^4=\begin{bmatrix}1&\frac{31}{16}\\0&\frac{1}{32}\end{bmatrix}.$$

(1) $a_3=1$.

(2) 因為 $a_3=1$，$a_4=1$，$a_5=1$ 滿足 $a_4-a_3=a_5-a_4$ 為等差數列 .

(3) 因為 $b_3=\frac{7}{4}$，$b_4=\frac{15}{8}$，$b_5=\frac{31}{16}$ 不滿足 $b_4-b_3=b_5-b_4$，

所以不是等差數列 .

(4) 因為 $c_3=0$，$c_4=0$，$c_5=0$，所以不是等比數列 .

(5) 因為 $d_3=\frac{1}{8}$，$d_4=\frac{1}{16}$，$d_5=\frac{1}{32}$ 滿足 $\frac{d_4}{d_3}=\frac{d_5}{d_4}$，

所以是等比數列 .

故選(2)(5) .

A. 因為 $5=1+4=2+3$，所以由機率的定義，得

$$\frac{2}{C^n_2}=\frac{1}{14}\Rightarrow C^n_2=28,$$

即 $\frac{n(n-1)}{2}=28\Rightarrow n(n-1)=56$.

解得 $n=8$.

B. 利用等比級數求和公式，得所求為

$$(1+2)+(1+2+2^2)+\cdots+(1+2+2^2+\cdots+2^{10})$$

$$=\frac{1\times(1-2^2)}{1-2}+\frac{1\times(1-2^3)}{1-2}+\cdots+\frac{1\times(1-2^{11})}{1-2}$$

$$=(2^2-1)+(2^3-1)+\cdots+(2^{11}-1)$$

$$=(2^2+2^3+\cdots+2^{11})-10$$

$$=\frac{2^2\times(1-2^{10})}{1-2}-10$$

$$=2^2\times(2^{10}-1)-10=4082.$$

C. 設 4 社區為甲乙丙丁，且甲要連續體檢 2 天，

○表當天排空，不體檢 .

依題意，安排方法相當於將

$\boxed{\text{甲甲}}$乙丙丁○○

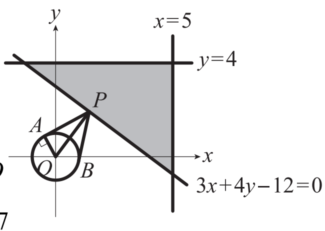
任意排成一列的方法數，共有 $\frac{6!}{2!}=360$ 種 .

D. 在所有直角三角形 OAP 中，$\overline{OA}$ 固定為 1，斜邊 $\overline{OP}$ 愈小，$\angle APO$ 愈大 .

因此，當 $\overline{OP}$ 最小時，$\angle APB=2\angle APO$ 最大，此時

$$\overline{OP}=\frac{|3\times0+4\times0-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{12}{5},$$

因此，$\sin\angle APO=\frac{5}{12}$.



利用二倍角公式，得

$$\cos\angle APB=1-2\sin^2\angle APO$$

$$=1-2\left(\frac{5}{12}\right)^2=\frac{47}{72}.$$

E. 設三種策略中的良級紅豆重量分別為 $a,2b,3c$ 公斤．依題意，得

$$\begin{cases} a+b=500 \\ a+2b+c=1000 \\ a+2b+3c=1500 \end{cases},$$

解得 $a=b=c=250$ ．

因此混合後的特級紅豆 750 公斤、優級紅豆 1250 公斤、良級紅豆 1000 公斤，

故商人可多賺

$$\left(750\times 50+1250\times 40+1000\times 30\right)$$

$$-\left(500\times 50+1000\times 40+1500\times 30\right)$$

$$=117500-110000=7500 \text{（元）}.$$

F. 設 $\overline{CQ}=x$ ．因為 $\triangle ABC$ 是邊長為 25 的正三角形，

所以 $\overline{AR}=15$， $\overline{AQ}=25-x$ ．

利用餘弦定理，得

$$\overline{PR}^2=10^2+15^2-2\cdot 10\cdot 15\cdot\cos 60^\circ=175,$$

$$\overline{PQ}^2=10^2+x^2-2\cdot 10\cdot x\cdot\cos 60^\circ$$

$$=x^2-10x+100,$$

$$\overline{QR}^2=15^2+\left(25-x\right)^2-2\cdot 15\cdot\left(25-x\right)\cdot\cos 60^\circ$$

$$=x^2-35x+475 .$$

又因為 $\triangle PQR$ 為直角三角形，

所以 $\overline{PR}^2+\overline{PQ}^2=\overline{RQ}^2$ ，即

$$175+x^2-10x+100=x^2-35x+475,$$

整理得 $25x=200$ ，解得 $x=8$ ．

故 $\overline{CQ}=8$ ．

G. 因為

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$$

$$=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}\right)$$

$$=\left(\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+h\overrightarrow{DC}\right)$$

$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot h\overrightarrow{DC}+k\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+k\overrightarrow{BC}\cdot h\overrightarrow{DC}$$

$$=2\times 2\times\cos 120^\circ+h\times 2^2+k\times 2^2+hk\times 2\times 2\times\cos 120^\circ$$

$$=-2+4h+4k-2hk,$$

所以 $-2+4h+4k-2hk=1$，即 $4h+4k-2hk=3\cdots①$

又因為

$$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}=\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}\right)$$

$$=\left(-\overrightarrow{BC}+k\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{DC}+h\overrightarrow{DC}\right)$$

$$=\left(k-1\right)\overrightarrow{BC}\cdot\left(h-1\right)\overrightarrow{DC}$$

$$=\left(k-1\right)\left(h-1\right)\left(2\times 2\times\cos 120^\circ\right)$$

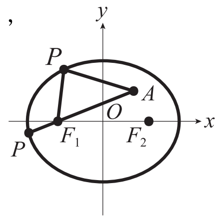
$$=-2hk+2h+2k-2,$$

所以 $-2hk+2h+2k-2=-\dfrac{2}{3}$，

即 $2hk-2h-2k=-\dfrac{4}{3}\cdots②$

由 ①+②，得 $2h+2k=\dfrac{5}{3}$，故 $h+k=\dfrac{5}{6}$ ．

H. 由橢圓 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 得 $a=5$， $b=4$，



再由 $a^2=b^2+c^2$，得 $c=3$ ．

因此， $F_1\left(-3,0\right)$， $F_2\left(3,0\right)$ ．

根據橢圓的定義，

$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a=10$，

因此

$$\overline{PA}+\overline{PF_2}=\overline{PA}+10-\overline{PF_1}=10+\left(\overline{PA}-\overline{PF_1}\right).$$

(1) 當 P,F_1,A 三點不共線時：

$\overline{PA}-\overline{PF_1}<\overline{AF_1}$（三角形兩邊之差必小於第三邊），

(2) 當 P,F_1,A 三點共線，且 $\overline{PA}>\overline{PF_1}$ 時：

$$\overline{PA}-\overline{PF_1}=\overline{AF_1} .$$

(3) 當 P,F_1,A 三點共線且 $\overline{PA}<\overline{PF_1}$ 時，

$$\overline{PA}-\overline{PF_1}=-\overline{AF_1} .$$

故 $\overline{PA}+\overline{PF_2}$ 最大值為 $10+\overline{AF_1}=10+\sqrt{29}$ ．