

106 學年度學科能力測驗 全真模擬試題 (C 卷)

數學考科

測驗範圍：高中數學一、二年級

教師用

作答注意事項

考試時間：100 分鐘

題型：

- 單選題共 6 題
- 多選題共 7 題
- 選填題共 7 題

作答方式：將答案填入卷末之答案欄中

註：此份試題本為模擬學科能力測驗之測驗形式，作答方式仍以未來實際之測驗形式為準。

※請聽從指示後才翻頁作答

 三民書局

版權所有
請勿翻印

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、 單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，將答案填入卷末之答案欄中。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

- () 1、若 \overline{AB} 為橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的一弦，且 \overline{AB} 之中點為 $M(4,2)$ ，則 \overline{AB} 方程式為何？
(1) $x+2y=8$ (2) $2x+y=8$ (3) $x-2y=8$ (4) $2x-y=8$ (5) $2x-y=-8$

答案：(1)

解析：設 $A(\alpha_1, \beta_1), B(\alpha_2, \beta_2) \in \Gamma$

$$\Rightarrow (4,2) = \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \right) \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 8, \beta_1 + \beta_2 = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1^2 + 4\beta_1^2 = 36 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \alpha_2^2 + 4\beta_2^2 = 36 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} : \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + 4(\beta_1^2 - \beta_2^2) = 0 \Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_2) = -4(\beta_1 + \beta_2)(\beta_1 - \beta_2)$$

$$\Rightarrow 8(\alpha_1 - \alpha_2) = -16(\beta_1 - \beta_2) \Rightarrow \frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{8}{-16} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \overline{AB} : y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 4) \Rightarrow 2y - 4 = -x + 4 \Rightarrow x + 2y = 8$$

故選(1)

- () 2、若 $2x + y + 3z = 3x - 2y + z = 4x - y + 2z, xyz \neq 0$ 則 $\frac{2x - y + z}{3x + 4y - z}$ 之值為何？

- (1) $\frac{-5}{19}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{4}{11}$ (4) $\frac{6}{7}$ (5) $-\frac{3}{7}$

答案：(1)

解析：
$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 3x - 2y + z \\ 3x - 2y + z = 4x - y + 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y - 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x : y : z = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 : -3 : 4$$

$$\text{令 } x = -t, y = -3t, z = 4t$$

$$\therefore \frac{2x - y + z}{3x + 4y - z} = \frac{-2t + 3t + 4t}{-3t - 12t - 4t} = \frac{5t}{-19t} = -\frac{5}{19}$$

故選(1)

()3、若 $a > \sqrt{2}$ ，已知雙曲線 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 的兩漸近線的銳交角為 60° ，且雙曲線中心到其中一焦點之距離為 c ，則 $\frac{c}{a} = ?$

- (1) $\sqrt{2}$ (2) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (3) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (4) 2 (5) $\sqrt{3}$

答案：(3)

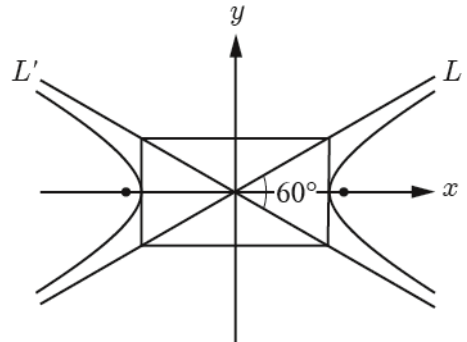
解析： $b^2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2}$

如圖， $\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 6 + 2 = 8 \Rightarrow c = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

故選(3)

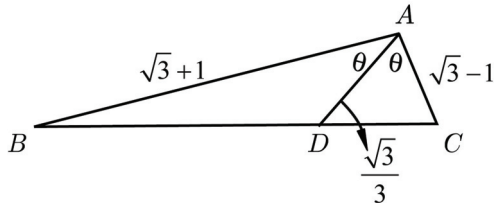


()4、 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \sqrt{3} + 1$ ， $\overline{AC} = \sqrt{3} - 1$ ，且 $\angle A$ 的內角平分線長為 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，則 $\triangle ABC$ 之面積

- 為 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\sqrt{2}$ (4) $\sqrt{3}$ (5) $\sqrt{6}$

答案：(2)

解析：



$$\therefore \triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ACD$$

$$\therefore \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)\sin 2\theta = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\frac{\sqrt{3}}{3}\sin \theta + \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\frac{\sqrt{3}}{3}\sin \theta$$

$$\Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \theta (\sqrt{3}+1 + \sqrt{3}-1)$$

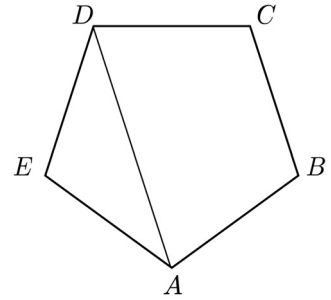
$$\Rightarrow 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}}{6} \sin \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

$$\triangle = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

故選(2)

() 5、正五邊形 $ABCDE$ 如右圖，若 $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AE}$ ，則下列何者正確？



(1) $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (2) $y = 1$ (3) $x + y = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

(4) $x - y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (5) $xy = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

答案：(4)

解析：設邊長為 a ，則 $\overline{AD}^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cos 108^\circ = \frac{3+\sqrt{5}}{2} a^2$

$$\therefore \overline{AD} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} a, \text{ 又 } \overline{AD} \parallel \overline{BC}$$

$$\therefore \overline{BC} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} \overline{AD} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \overline{AD}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \overrightarrow{AD} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \overrightarrow{BE}$$

$$\Rightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \overrightarrow{AE}$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \overrightarrow{AE}, \therefore x = 1, y = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\text{則 } x + y = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, x - y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, xy = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

故選(4)

() 6、眼睛之所以叫做「靈魂之窗」是因為，即使周遭瞬間變暗，人的眼睛仍然能漸漸適應環境。當光強度由 1000 Td 瞬間降至 10 Td，過 t 秒後人所能接受的光強度為 $I(t)$ ；其中 $I(t) = 10 + 990 \times a^{-5t}$ (a 為大於 1 的常數)。當光強度由 1000 Td 瞬間降至 10 Td 後，人接受光的強度為 21 Td 時，需要花費 s 秒，則 s 的值為何？(光的強度單位為 Td)

(1) $\frac{1+2\log 3}{5\log a}$ (2) $\frac{1+3\log 3}{5\log a}$ (3) $\frac{2+\log 3}{5\log a}$ (4) $\frac{2+2\log 3}{\log a}$ (5) $\frac{2+3\log 3}{5\log a}$

答案：(1)

解析： $I(s) = 21 \Rightarrow 10 + 990 \times a^{-5s} = 21 \Rightarrow 990 \times a^{-5s} = 11 \Rightarrow a^{-5s} = \frac{1}{90} \Rightarrow \log a^{-5s} = \log \frac{1}{90} = -\log 90$

$$\Rightarrow -5s \log a = -(\log 10 + \log 3^2) \Rightarrow s = \frac{1+2\log 3}{5\log a}$$

故選(1)

二、多選題（占 35 分）

說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，將答案填入卷末之答案欄中。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

() 7、設兩直線 $L_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+1}{-1}$ 與 $L_2: \frac{x-2}{n} = \frac{y+8}{5} = \frac{z+16}{3}$ 相交於一點

$Q(a,b,c)$ ，而包含 L_1 與 L_2 的平面方程式為 $E: x + py + qz + r = 0$ ，則下列敘述何者正確？

(1) $n > 0$ (2) $a + b + c < 0$ (3) $p > q$ (4) $a + c = r$ (5) L_1 與 L_2 之銳交角大於 60°

答案：(1)(4)(5)

解析：(1) \circ :
$$\begin{cases} 1 + 3t = 2 + n \cdot s \\ 6 + 2t = -8 + 5s \\ -1 - t = -16 + 3s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3t - ns = 1 \\ 2t - 5s = -14 \\ -t - 3s = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ s = 4 \end{cases} \Rightarrow 9 - 4n = 1 \Rightarrow n = 2$$

(2) \times : $t = 3$ 代回 $\Rightarrow Q(1 + 3 \cdot 3, 6 + 2 \cdot 3, -1 - 3) \Rightarrow Q(10, 12, -4)$

$$\therefore a + b + c = 10 + 12 + (-4) = 18$$

(3) \times : $\vec{v}_1 = (3, 2, -1), \vec{v}_2 = (2, 5, 3)$

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = (11, -11, 11) = 11(1, -1, 1)$$

$$\therefore E = x - y + z + r = 0$$

$$Q(10, 12, -4) \text{ 代入} \Rightarrow 10 - 12 + (-4) + r = 0$$

$$\Rightarrow r = 6$$

$$\Rightarrow E: x - y + z + 6 = 0$$

$$\therefore p = -1, q = 1 \Rightarrow p < q$$

(4) \circ : $a + c = 10 + (-4) = 6 = r$

$$(5) \circ : \cos \theta = \pm \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2|} = \pm \frac{6 + 10 - 3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{38}} = \pm \frac{13}{\sqrt{532}} = \pm \frac{13\sqrt{133}}{266}$$

又 θ 為銳角

$$\therefore \cos \theta = \frac{13\sqrt{133}}{266} > \frac{1}{2} \Rightarrow \theta > 60^\circ$$

故選(1)(4)(5)

()8、設 $a > 0, a \neq 1$ ，關於 $y = a^x$ ， x 為任意實數的圖形，下列敘述何者為真？

- (1)圖形向右上升
- (2)圖形恆過(1, 0)
- (3)圖形以 x 軸為漸近線
- (4)圖形與 $y = -a^{-x}$ 之圖形對稱於原點
- (5)圖形與 $y = \log_a x$ 之圖形對稱於直線 $x + y = 0$

答案：(3)(4)

解析：(1)×：若 $a > 1$ ，則向右上升。若 $0 < a < 1$ ，則向左上升

(2)×：恆過(0,1)

(5)×：對稱於 $x - y = 0$

故選(3)(4)

()9、已知 α, β 為銳角， $\cos(2\alpha + \beta) = \frac{2}{7}$ ， $\cos(\alpha + \beta) = \frac{2}{3}$ ，則下列何者正確？

(1) $\sin(2\alpha + \beta) = \frac{3\sqrt{5}}{7}$ (2) $\sin(2\alpha + \beta) = -\frac{3\sqrt{5}}{7}$ (3) $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{5}}{3}$

(4) $\cos \alpha = \frac{19}{21}$ (5) $\cos \beta = \frac{58}{63}$

答案：(1)(3)(4)(5)

解析：(1)○(2)×：∵ $\cos(\alpha + \beta) = \frac{2}{3}$ ，∴ $0^\circ < \alpha + \beta < 90^\circ \Rightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow 0^\circ < 2\alpha + \beta < 180^\circ$

$$\therefore \sin(2\alpha + \beta) = +\sqrt{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$$

(3)○： $\sin(\alpha + \beta) = +\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

(4)○： $\cos \alpha = \cos[(2\alpha + \beta) - (\alpha + \beta)] = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3\sqrt{5}}{7} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4}{21} + \frac{15}{21} = \frac{19}{21}$

(5)○： $\cos \beta = \cos[(\alpha + \beta) - \alpha] = \frac{2}{3} \cdot \frac{19}{21} + \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{21} = \frac{38 + 20}{63} = \frac{58}{63}$

故選(1)(3)(4)(5)

()10、某次測驗成績的算術平均數是 36 分，標準差為 4 分，最高分為 50 分，最低分為 20 分。因成績太差，老師打算以下列一種方式來調整成績：

① $y_1 = x + 30$ ② $y_2 = 2x$ ③ $y_3 = \frac{1}{2}x + 50$

其中 x 為原始成績， y_1, y_2, y_3 為調整後的成績，則下列敘述何者正確？

- (1)欲使所有同學都及格，要採用①案
 (2)欲使所有同學的成績集中，要採用③案
 (3)欲使算術平均數最高，要採用②案
 (4)欲使四分位差最小，要採用①案
 (5)欲使標準差最大，要採用②案

答案：(2)(3)(5)

解析：(1)×：應選③才可使最低 20 分調成 60 分

$$(2)(5)○：\sigma_1 = \sigma = 4, \sigma_2 = 2\sigma = 8, \sigma_3 = \frac{1}{2}\sigma = 2$$

$$(3)○：\mu_1 = 36 + 30 = 66, \mu_2 = 2 \times 36 = 72, \mu_3 = \frac{1}{2} \times 36 + 50 = 68$$

$$(4)×：若原始成績之四分位差為 QD ，則 $QD_1 = QD, QD_2 = 2QD, QD_3 = \frac{1}{2}QD$$$

故應選③

故選(2)(3)(5)

()11、從 100~999 的三位數中任選一數，若其百位，十位，個位數字分別為 a, b, c ，則下列何者正確？

$$(1) a = b = c \text{ 之機率為 } \frac{9}{899}$$

$$(2) a \neq b \neq c \text{ 之機率為 } \frac{18}{25}$$

$$(3) (a-b)(b-c)(c-a) = 0 \text{ 之機率為 } \frac{7}{25}$$

$$(4) abc = 0 \text{ 之機率為 } \frac{19}{100}$$

$$(5) \text{二次方程式 } x^2 - 2ax + bc = 0 \text{ 有重根的機率為 } \frac{2}{125}$$

答案：(2)(3)(4)

解析：共 $999 - 100 + 1 = 900$ 個三位數

$$(1)×：a = b = c : 1 = 1 = 1, 2 = 2 = 2, \dots, 9 = 9 = 9 \Rightarrow 9 \text{ 種}, \therefore P = \frac{9}{900} = \frac{1}{100}$$

$$(2)○：P = \frac{9 \times P_2^9}{900} = \frac{72}{100} = \frac{18}{25}$$

$$(3)○：P = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}$$

$$(4)○：考慮 $abc \neq 0 \Rightarrow 9 \times 9 \times 9 = 729$ ， $P = 1 - \frac{729}{900} = \frac{171}{900} = \frac{19}{100}$$$

$$(5) \times : D = 4a^2 - 4bc = 0 \Rightarrow a^2 = bc$$

(1) $a = 1 : (b, c) = (1, 1)$	(6) $a = 6 : (b, c) = (9, 4), (6, 6), (4, 9)$
(2) $a = 2 : (b, c) = (4, 1), (2, 2), (1, 4)$	(7) $a = 7 : (b, c) = (7, 7)$
(3) $a = 3 : (b, c) = (9, 1), (3, 3), (1, 9)$	(8) $a = 8 : (b, c) = (8, 8)$
(4) $a = 4 : (b, c) = (8, 2), (4, 4), (2, 8)$	(9) $a = 9 : (b, c) = (9, 9)$
(5) $a = 5 : (b, c) = (5, 5)$	

$$P = \frac{17}{900}$$

故選(2)(3)(4)

() 12、若 α, β 為 $2x^2 - 3x + 4 = 0$ 之根，則下列何者正確？

$$(1) \alpha^2 + \beta^2 = -\frac{7}{4} \quad (2) (\alpha - \beta)^2 = -\frac{23}{4} \quad (3) \alpha^3 + \beta^3 = \frac{45}{8}$$

$$(4) \alpha^4 + \beta^4 = -\frac{79}{16} \quad (5) \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{7}{8}$$

答案：(1)(2)(4)(5)

解析： $\because \alpha + \beta = \frac{3}{2}, \alpha\beta = 2$

$$(1) \circ : \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{9}{4} - 4 = -\frac{7}{4}$$

$$(2) \circ : (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \frac{9}{4} - 8 = -\frac{23}{4}$$

$$(3) \times : \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \frac{27}{8} - 3 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{8} - 9 = -\frac{45}{8}$$

$$(4) \circ : (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = \frac{49}{16} - 2 \cdot 4 = \frac{49}{16} - 8 = -\frac{79}{16}$$

$$(5) \circ : \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = -\frac{7}{8}$$

故選(1)(2)(4)(5)

() 13、好歡樂模型公司有 R 、 B 兩台模型上色機，其上色錯誤的機率分別為 0.2、0.5，兩台一起使用時，至少有一台會上色錯誤的機率為 0.6。今在配置上色順序時，只有在前一台機器上色錯誤時才會影響到後一台機器。兩台皆上色錯誤則模型為失敗品無法出售。下列敘述何者正確？

(1) RB 的配置方式模型為失敗品的機率是 0.1

(2) RB 、 BR 兩種配置方式模型為失敗品的機率大小為 $RB > BR$

(3) 已知 R 上色錯誤，則 RB 、 BR 兩種配置方式

模型為失敗品的機率大小為 $RB > BR$

(4) BR 的配置方式模型會有瑕疵但非失敗品的機率是 0.5

(5) BR 配置下，有 100 隻模型要上色，

在 B 上色完全錯誤的情況下可以出售的模型有 50 隻

答案：(1)(4)

解析：由題目可知 $P(R) = 0.2, P(B) = 0.5, P(R \cup B) = 0.6$

(1) ○ : $\because P(R \cup B) = P(R) + P(B) - P(R \cap B)$

\Rightarrow 失敗品的機率為 $P(R \cap B) = 0.2 + 0.5 - 0.6 = 0.1$

(2) × : 失敗品為兩台機器都要上色錯誤，故 $RB = BR$

(3) × : RB 為失敗品的機率 $= P(B|R) = \frac{0.1}{0.2} = 0.5$

\because 已知 R 上色錯誤，則只要 B 上色錯誤就會是失敗品

$\Rightarrow BR$ 為失敗品的機率 $= 0.5$ ，故 $RB = BR$

(4) ○ : 有瑕疵但非失敗品的機率

$=$ 至少有一台上色錯誤 $-$ 兩台皆上色錯誤 $= 0.6 - 0.1 = 0.5$

(5) × : $P(R|B) \times 100 = \frac{0.1}{0.5} \times 100 = 20$

故選(1)(4)

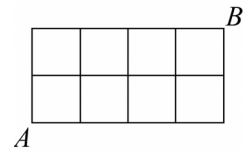
第貳部分：選填題(占 35 分)

說明： 1. 第A至G題，將答案填入卷末之答案欄中。
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A、棋盤圖形如右，其中每一小格皆為正方形，「兵」由 A 往 B 走，「卒」由 B 往 A 走，兵與卒同時出發，速度相同，兩者均沿最短路線前進，則

(1) 若在每一個分叉點，選擇前進方向之機率相同，則兵、卒相遇之機率為_____。

(2) 若改為由起點到終點，各路線被選取機率相同，則兵、卒相遇的機率為_____。

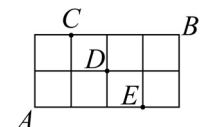


答案： $\frac{17}{64}, \frac{11}{25}$

解析：(1) 兵、卒在 C 相遇之機率 $(\frac{1}{2})^3 \times [(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^3] = \frac{1}{16}$

兵、卒在 D 相遇之機率 $[3 \times (\frac{1}{2})^3] \times [3 \times (\frac{1}{2})^3] = \frac{9}{64}$

兵、卒在 E 相遇之機率 $(\frac{1}{2})^3 \times [(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^3] = \frac{1}{16}$



$$\therefore \frac{9}{64} + \frac{1}{16} \times 2 = \frac{17}{64}$$

(2) A 到 B 共有 $\frac{6!}{2!4!} = 15$ 種走法， A 到 B 經 C 之走法有 3 種

A 到 B 經過 D 之走法有 9 種， A 到 B 經 E 之走法有 3 種

$$\left(\frac{3}{15}\right) \times \left(\frac{3}{15}\right) + \left(\frac{9}{15} \times \frac{9}{15}\right) + \left(\frac{3}{15} \times \frac{3}{15}\right) = \frac{11}{25}$$

B、若 $1 < a < b < a^2$ ，下列四個實數 $2, \log_a b, \log_b a, \log_{ab} a^2$ 中最大的是_____，最小的是_____。

答案：2, $\log_b a$

解析： $\log_a a < \log_a b < \log_a a^2 \Rightarrow 1 < \log_a b < 2 \Rightarrow 1 > \frac{1}{\log_a b} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \log_b a < 1$

$$\log_{ab} a^2 = \frac{\log_a a^2}{\log_a ab} = \frac{2}{\log_a a + \log_a b} = \frac{2}{1 + \log_a b}$$

$$\text{又 } 2 < 1 + \log_a b < 3 \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{1 + \log_a b} > \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{2}{1 + \log_a b} < 1$$

故 2 最大， $\log_b a$ 最小

C、一雙曲線之貫軸長 4，漸近線與貫軸之夾角為 60° ，設此雙曲線之正焦弦長為 l ，則 $l =$ _____。

答案：12

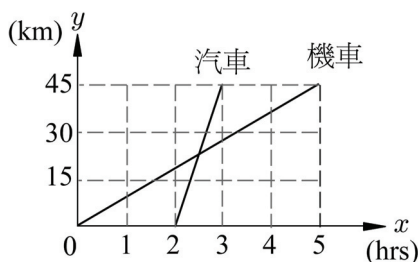
解析：令中心 $O(0,0)$ ， $a = 2$

漸近線斜率 $m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ ，漸近線方程式 $\sqrt{3}x - y = 0$ ， $\sqrt{3}x + y = 0$

設橫向雙曲線： $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = k$ ，又 $k = 4 = a^2$

\therefore 雙曲線方程式： $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ ， $l = \frac{2b^2}{a} = 12$

D、小明騎機車和小華開汽車從臺北到中壢沿相同路徑行駛 45 公里，行駛的距離 y 公里與所需的時間 x 小時的函數關係如圖所示，則汽車出發_____小時後與機車相遇，又汽車比機車早_____小時到達中壢。



答案：0.5, 2

解析：汽車： $y = ax + b$ 過(2, 0), (3, 45)

$$\begin{cases} 0 = 2a + b \\ 45 = 3a + b \end{cases} \Rightarrow a = 45, b = -90$$

$$\therefore y = 45x - 90$$

機車： $y = cx + d$ 過(0, 0), (5, 45)

$$\begin{cases} 0 = d \\ 45 = 5c \end{cases} \Rightarrow c = 9$$

$$\therefore y = 9x$$

$$\text{故 } 9x = 45x - 90 \Rightarrow 36x = 90 \Rightarrow x = 2.5$$

$$2.5 - 2 = 0.5$$

$$5 - 3 = 2$$

因此汽車出發 0.5 小時後和機車相遇，且汽車比機車早 2 小時到達中壢

E、 $\triangle ABC$ 中，外心為 O ，且外接圓半徑為 2，若 $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle B = 45^\circ$ ，則

$$|\vec{OA} + 2\vec{OB} - \vec{OC}| = \underline{\hspace{2cm}}。$$

答案： $2\sqrt{8 - 2\sqrt{3}}$

解析： $\because \angle A = 60^\circ$ ， $\angle B = 45^\circ \Rightarrow \angle C = 75^\circ$

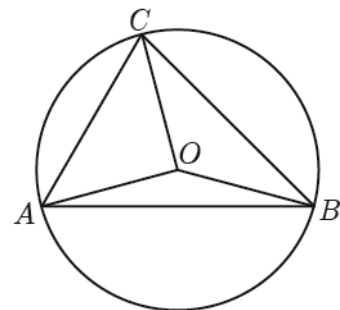
$$\Rightarrow \angle AOB = 150^\circ, \angle BOC = 120^\circ, \angle COA = 90^\circ$$

考慮 $|\vec{OA} + 2\vec{OB} - \vec{OC}|^2$

$$\begin{aligned} &= |\vec{OA}|^2 + 4|\vec{OB}|^2 + |\vec{OC}|^2 + 4\vec{OA} \cdot \vec{OB} - 4\vec{OB} \cdot \vec{OC} - 2\vec{OA} \cdot \vec{OC} \\ &= 4 + 4 \cdot 4 + 4 + 4 \cdot (2 \cdot 2 \cos 150^\circ) - 4(2 \cdot 2 \cos 120^\circ) - 2(2 \cdot 2 \cos 90^\circ) \end{aligned}$$

$$= 4 + 16 + 4 + 16 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 0 = 24 - 8\sqrt{3} + 8 = 32 - 8\sqrt{3}$$

$$\therefore |\vec{OA} + 2\vec{OB} - \vec{OC}| = \sqrt{32 - 8\sqrt{3}} = 2\sqrt{8 - 2\sqrt{3}}$$



F、為了測量海上兩座燈塔 A, B 的距離，某人在海邊選定 C, D 兩點，並測得 $\overline{CD} = 100$ 公尺， $\angle ACD = 90^\circ$ ， $\angle BCD = 30^\circ$ ， $\angle ADC = 45^\circ$ ， $\angle ADB = 75^\circ$ ，則 $\overline{AB} =$ _____ 公尺。

答案： $100\sqrt{4-\sqrt{3}}$

解析： $\triangle BCD$ 中：

$$\begin{aligned} \angle BCD = 30^\circ, \quad \angle CDB = 45^\circ + 75^\circ = 120^\circ &\Rightarrow \angle CBD = 30^\circ \\ &\Rightarrow \overline{BD} = \overline{CD} = 100 \end{aligned}$$

直角 $\triangle ACD$ 中：

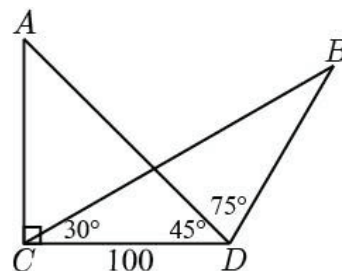
$$\angle ADC = \angle CAD = 45^\circ \Rightarrow \overline{AD} = 100\sqrt{2}$$

$\triangle ABD$ 中：

$$\overline{AB}^2 = (100\sqrt{2})^2 + 100^2 - 2 \times 100 \times 100\sqrt{2} \times \cos 75^\circ = 100^2 \left(2 + 1 - 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right)$$

$$= 100^2 [3 - (\sqrt{3} - 1)] = 100^2 (4 - \sqrt{3})$$

$$\overline{AB} = 100\sqrt{4 - \sqrt{3}}$$



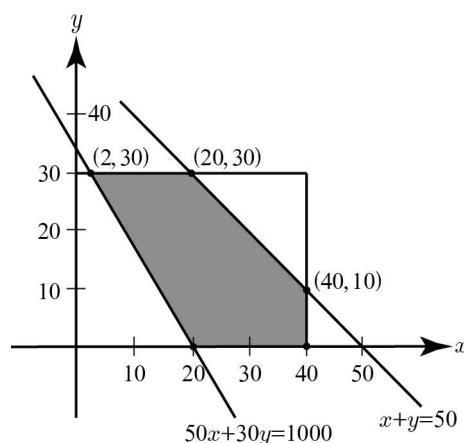
G、中華電信招聘新員工，共有 1000 人應徵參加筆試。筆試場地借用某大學的教室，該校可租借的大教室有 40 間，每間可容納 50 人，每間租金 800 元；小教室有 30 間，每間可容納 30 人，每間租金 400 元。考慮監考人員的限制，筆試教室不能超過 50 間。試問租借大教室 _____ 間，小教室 _____ 間，來進行筆試，最省租借場地費用。

答案： 2, 30

解析： 設租借大教室 x 間，小教室 y 間

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 40 \\ 0 \leq y \leq 30 \\ 50x + 30y \geq 1000 \\ x + y \leq 50 \end{cases}$$

(x, y)	$k = 800x + 400y$
(40, 10)	36000
(2, 30)	13600
(20, 30)	28000
(20, 0)	16000
(40, 0)	32000



故租借大教室 2 間，小教室 30 間

答案卷

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、 單選題（占 30 分）

1 (1) 2 (1) 3 (3) 4 (2) 5 (4) 6 (1)

二、 多選題（占 35 分）

7 (1)(4)(5) 8 (3)(4) 9 (1)(3)(4)(5) 10 (2)(3)(5) 11 (2)(3)(4) 12 (1)(2)(4)(5) 13 (1)(4)

第貳部分：選填題（占 35 分）

A	$\frac{17}{64}, \frac{11}{25}$	B	$2, \log_b a$	C	12
D	0.5, 2	E	$2\sqrt{8-2\sqrt{3}}$	F	$100\sqrt{4-\sqrt{3}}$
G	2, 30				