106 學年度學科能力測驗

全真模擬試題(B 卷)

數學考科

教師用

測驗範圍：高中數學一、二年級

作答注意事項

考試時間：100 分鐘

題型：

- 單選題共 7 題
- 多選題共 6 題
- 選填題共 7 題

作答方式：將答案填入卷末之答案欄中

註：此份試題本為模擬學科能力測驗之測驗形式，作答方式仍以未來實際之測驗形式為準。

※請聽從指示後才翻頁作答

三民書局

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、 單選題（占 35 分）

說明：第 1 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，將答案填入卷末之答案欄中。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

(　)1、設 $f(x)$ 為五次實係數多項式，且 $f(2-i)=0$, $f(-2-i)=0$ ，則函數 $f(x)$ 的圖形與 x 軸有幾個交點？ (1)0 (2)1 (3)2 (4)3 (5)無法決定

答案：(2)

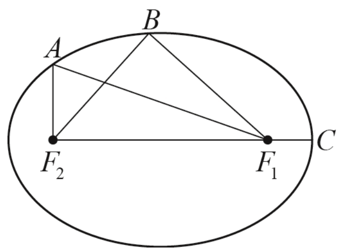
解析：$\because f(x)$ 為實係數方程式，$\therefore f(2+i)=0$ 和 $f(-2+i)=0$ (虛根成對)

即 $f(x)=[x-(2-i)][x-(2+i)][x-(-2-i)][x-(-2+i)](ax-b)=0$

故 $f(x)=0$ 與 x 軸交於一點 $(\frac{b}{a},0)$

故選(2)

(　)2、如圖，小華建了一個橢圓形球檯，其中 F_1 與 F_2 為橢圓的焦點。現在有一個小圓球均從焦點 F_1 發射，經由橢圓邊反射到直線焦點 F_2 ，若有三條路線如下：



第(I)條路線：$F_1 \to A \to F_2$

第(II)條路線：$F_1 \to B \to F_2$

第(III)條路線：$F_1 \to C \to F_1 \to F_2$

則三條路線的長短比較何者正確？ (1)(I) > (II) > (III) (2)(I) < (II) < (III) (3)(I) = (II) = (III) (4)(I) ≤ (III) < (II) (5)(I) > (II) = (III)

答案：(3)

解析：∵橢圓上任意點到兩交點的距離和為定值

∴(I)，(II)，(III)相等

故選(3)

(　)3、一複數 z 之實部為 a ，虛部為 b ，則 $\frac{z-2}{z}$ 之虛部為

(1)$\frac{a^2-2a-b^2}{a^2-b^2}+\frac{2b}{a^2-b^2}$ (2)$\frac{a^2-2a+b^2}{a^2+b^2}$ (3)$\frac{b}{a+b}$ (4)$\frac{2b}{a^2+b^2}$ (5)$\frac{2b}{a^2-b^2}$

答案：(4)

解析：$z=a+bi$

$$\frac{z-2}{z}=\frac{(a-2)+bi}{a+bi}=\frac{[(a-2)+bi](a-bi)}{a^2+b^2}=\frac{a^2-2a+b^2}{a^2+b^2}+\frac{2b}{a^2+b^2}i$$

故選(4)

(　　)4、同時投擲兩公正骰子，其點數和為 a ，點數積為 b ，試求 $a+b$ 為偶數的機率為何？

(1) $\frac{1}{36}$　(2) $\frac{1}{12}$　(3) $\frac{5}{36}$　(4) $\frac{7}{36}$　(5) $\frac{1}{4}$

答案：(5)

解析：$\because a+b$ 為偶數　$\therefore a, b$ 為奇數，或 a, b 為偶數

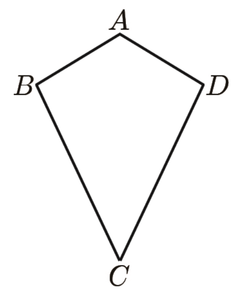
若 a, b 為奇數，則矛盾

若 a, b 為偶數，則兩骰子皆擲出偶數點

且兩骰子皆擲出偶數點的情況，共 9 種

故機率為 $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$ ，故選(5)

(　　)5、小雲想做一個風箏，設計圖如右，其中 $\overline{AB}=\overline{AD}=1, \overline{BC}=\overline{DC}=2,$ $\angle ABC=\angle ADC$ 且 $\angle BAD=2\theta$ ，則此風箏的面積為___________。

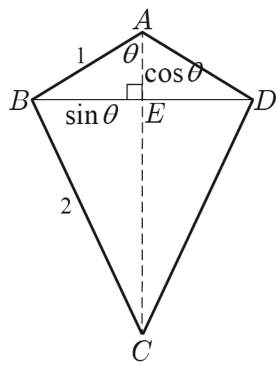


(1) $\sin\theta$　(2) $2\sin\theta\cos\theta$　(3) $9\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

(4) $\sin\theta(\cos\theta+\sqrt{4-\sin^2})$　(5) $\sin\theta(\cos\theta+\sqrt{4+\sin^2})$

答案：(4)

解析：如圖， $\overline{BE}=\sin\theta, \overline{AE}=\cos\theta$



則 $\overline{CE}=\sqrt{2^2-\sin^2\theta}$

$\Rightarrow$ 風箏面積 $=\triangle ABD+\triangle BCD=\frac{1}{2}(2\sin\theta\cos\theta+2\sin\theta\sqrt{4-\sin^2})$

$=\sin\theta(\cos\theta+\sqrt{4-\sin^2})$

故選(4)

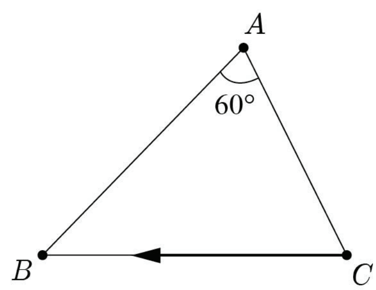
(　　)6、$\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=5, \overline{AC}=2, \angle BAC=60^\circ$ ，且 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}, x\geq 0, y\geq 0, x+y=1$ ，若所有 P 點所成之圖形為 S ，則：

(1) S 為一直線　(2) S 為射線　(3) P 不在 $\overline{BC}$ 上　(4) S 的長為 7　(5) S 的長為 $\sqrt{19}$

答案：(5)

解析：如圖， $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+(1-x)\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=x(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\Rightarrow \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP}=x(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})$



$\Rightarrow \overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CB}, 0\leq x\leq 1$

$\therefore P$ 之軌跡為 $\overline{BC}$

$\overline{BC}=\sqrt{5^2+2^2-2\cdot 5\cdot 2\cdot\cos 60^\circ}=\sqrt{19}$ ，故選(5)

(　　)7、設 $n=1+12+123+1234+\cdots+123456789$，則 n 除以11的餘數為

(1)3　(2)4　(3)5　(4)6

答案：(1)

解析：所求 $=1+1+2+2+3+3+4+4+5$ 除以11之餘數

$=25$ 除以11之餘數

$=3$，故選(1)

二、多選題（占 **30** 分）

說明：第 8 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，將答案填入卷末之答案欄中。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

(　　　)8、化簡下列根式，何者正確？ (1) $\sqrt{\left(\sqrt{17}-4\right)^2}=\sqrt{17}-4$　(2) $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=2-\sqrt{5}$

(3) $\sqrt{\dfrac{4a}{6}}=\dfrac{\sqrt{6a}}{3}$　(4) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{15}=5\sqrt{5}$　(5) $\sqrt{4b^2}=2b$

答案：(13)

解析：(1)○：$\sqrt{\left(\sqrt{17}-4\right)^2}=\left|\sqrt{17}-4\right|=\sqrt{17}-4$　(2)×：$\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=\left|2-\sqrt{5}\right|=\sqrt{5}-2$

(3)○：$\sqrt{\dfrac{4a}{6}}=\dfrac{\sqrt{2a}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6a}}{3}$　(4)×：$\sqrt{10}\cdot\sqrt{15}=\sqrt{2\cdot5\cdot3\cdot5}=5\sqrt{6}$

(5)×：$\sqrt{4b^2}=\sqrt{(2b)^2}=|2b|=2|b|$

故選(1)(3)

(　　　)9、某次數學測驗後，老師看到成績過低，決定採取補救措施，老師要學生訂正考卷，若訂正都正確，就給予訂正分數 100 分，並將原始分數與 100 分相加除以 2 作為實得分數。假設每位同學訂正都完全正確，則下列有關兩次分數之間的敘述何者正確？

(1)若甲生的原始分數大於乙生的原始分數，則甲生的實得分數也大於乙生的實得分數

(2)若丙生的原始分數恰為全班原始分數的中位數，則丙生的實得分數亦為全班實得分數的中位數

(3)實得分數之算術平均數比原始分數的算術平均數的一半多 50 分

(4)實得分數之標準差是原始分數的標準差的一半

(5)若甲生的原始分數比丙生多 10 分，則甲生的實得分數比乙生多 8 分

答案：(1234)

解析：設原始成績為 X，補救後成績為 $Y=\dfrac{X+100}{2}=\dfrac{X}{2}+50$

(1)(2)(3)○

(4)○：$\sigma_y=\dfrac{1}{2}\sigma_x$

(5)×：甲生比乙生實得分數應多得 5 分

故選(1)(2)(3)(4)

(　　　)10、若 θ 為第二象限角，則 $\dfrac{\theta}{3}$ 可能是第幾象限角？

(1)第一象限　(2)第二象限　(3)第三象限　(4)第四象限　(5) $\dfrac{\theta}{3}$ 在坐標軸上

答案：(124)

解析：$360°\cdot n+90°<\theta<360°\cdot n+180°,\ n\in\mathbb{Z}\Rightarrow 120°\cdot n+30°<\dfrac{\theta}{3}<120°\cdot n+60°$

當 $n=0$ 時，$30°<\dfrac{\theta}{3}<60°\Rightarrow$ 第一象限

當 $n=1$ 時，$150°<\dfrac{\theta}{3}<180°\Rightarrow$ 第二象限

當 $n=2$ 時，$270°<\dfrac{\theta}{3}<300°\Rightarrow$ 第四象限

故選(1)(2)(4)

(　　　)11、設直線 L 通過 $A(5,-3,6), B(5,0,3)$ 兩點，又 L 在平面 $E:2x-y+2z-7=0$ 之正射影的直線方程式為 $L':\dfrac{x-c}{a}=\dfrac{y-d}{b}=\dfrac{z-1}{1}$, a, b, c, d 為實數，則下列何者正確？

(1) $a=2$　(2) $b=-2$　(3) $c=3$　(4) $d=-1$　(5) $a+b+c+d=0$

答案：(235)

解析：$\overrightarrow{AB}=(0,3,-3)$，又 $(0,3,-3)\cdot(2,-1,2)\neq 0$，$\therefore L$ 不與 E 平行

設 A 在 E 上之正射影為 $A'(a_1,a_2,a_3)$

$\therefore \overrightarrow{AA'}=(a_1-5,a_2+3,a_3-6)=t(2,-1,2)\Rightarrow(a_1,a_2,a_3)=(2t+5,-t-3,2t+6)$

代入 E 得 $2(2t+5)-(-t-3)+2(2t+6)-7=0\Rightarrow 9t+18=0\Rightarrow t=-2$

$\therefore A'(1,-1,2)$

設 B 在 E 上之正射影為 $B'(b_1,b_2,b_3)$

$\therefore \overrightarrow{BB'}=(b_1-5,b_2,b_3-3)=t(2,-1,2)\Rightarrow(b_1,b_2,b_3)=(2t+5,-t,2t+3)$

代入 E 得 $2(2t+5)-(-t)+2(2t+3)-7=0\Rightarrow 9t+9=0\Rightarrow t=-1$

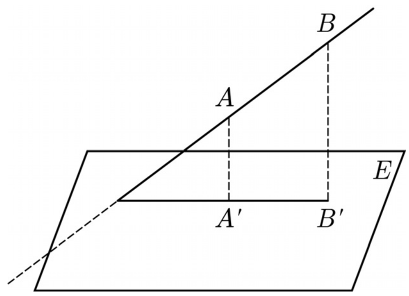
$\therefore B'(3,1,1)$

$\overrightarrow{A'B'}=(2,2,-1)=-(-2,-2,1)$

又 L' 過 $B'(3,1,1)$，$\therefore$直線 $L':\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$

$\therefore a=-2, b=-2, c=3, d=1, a+b+c+d=0$

故選(2)(3)(5)



(　　　)12、設 $F(2,3)$ 為拋物線上之焦點，又 $P(-1,3)$ 為拋物線上之頂點，則：

(1)對稱軸為 $y=3$　(2)準線為 $x=1$　(3)拋物線開口向右

(4)拋物線方程式為 $(x+1)^2=12(y-3)$　(5)拋物線程式為 $y^2-6y-12x-3=0$

答案：(135)

解析：(1)(3)○

(2)×：準線為 $x=-4$

(4)×(5)○：拋物線方程式為 $(y-3)^2=12(x+1)\Rightarrow y^2-6y-12x-3=0$

故選(1)(3)(5)

(　　　)13、$(x+y)^n$ 的展開式中，若第 7 項係數最大，則 $n=$？

(1)11　(2)12　(3)13　(4)14　(5)15

答案：(123)

解析：考慮以下三種情形：

(1)若 $(x+y)^n$ 展開式中，第 7 項係數最大，即 C_6^n 最大 $\Rightarrow n=12$

(2)若 $(x+y)^n$ 展開式中，第 6 項與第 7 項係數相等且最大，即 $C_5^n=C_6^n\Rightarrow n=11$

(3)若 $(x+y)^n$ 展開式中，第 7 項與第 8 項係數相等且最大，即 $C_6^n=C_7^n\Rightarrow n=13$

故選(1)(2)(3)

第貳部分：選填題(占 **35**分)

說明：1.第 A 至 G 題，將答案填入卷末之答案欄中。
　　　2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A、方程式 $\Gamma:\dfrac{x^2}{4-t}+\dfrac{y^2}{t-1}=1$ 為橢圓，且長軸在 x 軸上，則 t 之範圍為________。

答案：$1<t<\dfrac{5}{2}$

解析：$\begin{cases}4-t>0\\ t-1>0\\ 4-t>t-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t<4\\ t>1\\ 2t<5\Rightarrow t<\dfrac{5}{2}\end{cases}$，$\therefore 1<t<\dfrac{5}{2}$

B、某儀器顯示幕有10個指示燈排成一排，每個指示燈皆以發光或熄滅來表示不同的信號，若每次其中有4個發光，且至少3個相鄰，一共可表示__________種不同的信號。

答案：49

解析：分以下兩種情形討論：

(1)4 個都相鄰：

○○○○●●●●●●
●○○○○●●●●●
⋱
●●●●●●○○○○

7種

(2)3 個相鄰，另 1 個不相鄰：

先放 6 個不亮的

● ● ● ● ● ●

去插 7 個空隙

$P_2^7=42$，$\therefore 7+42=49$

C、若n為正整數，且$1,2,3,4,\cdots,(n-1),n$的標準差為$\sqrt{10}$，則$n=$____________。

答案：11

解析：$\mu=\dfrac{1}{n}(1+2+\cdots+n)=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n+1}{2}$

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\mu^2=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-(\frac{n+1}{2})^2=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-(\frac{n+1}{2})^2$$

$$=\frac{n+1}{2}[\frac{2n+1}{3}-\frac{n+1}{2}]=\frac{n+1}{2}\cdot\frac{4n+2-3n-3}{6}=\frac{(n+1)(n-1)}{12}=10$$

$\Rightarrow n^2-1=120\Rightarrow n^2=121\Rightarrow n=11$

D、小彭有做走樓梯的運動，第一次走 1 階，第二次走 2 階，……，以此類推，共走 40 次。若小彭有從一樓開始走樓梯，先往上走，途中轉向 2 次，最終回到一樓，則小彭有最晚在第______次後，需要作第一次轉向。

答案：10

解析：僅轉向兩次，則移動方向是上→下→上，且最終回到一樓

表示向上爬與向下走樓梯的階數相同

而總階數和為$\displaystyle\sum_{n=1}^{40}n=\frac{41\times 40}{2}=820$，故向上共爬了$\dfrac{820}{2}=410$階

假設第k次到第m次走樓梯的方向為向下

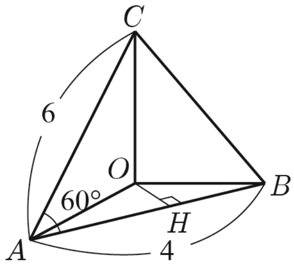
則向下共走了$\displaystyle\sum_{n=k}^{m}n=\frac{(k+m)(m-k+1)}{2}=410\Rightarrow(k+m)(m-k+1)=820$

因為k,m都是整數，且$1\le k<m\le 40$，取$\begin{cases}k+m=41\\m-k+1=20\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=11\\m=30\end{cases}$

故小彭有在第 10 次後需要作第一次轉向

E、空間中三直線$\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$互相垂直，且$\overline{OH} \perp \overline{AB}$，若$\overline{AB}=4, \overline{AC}=6, \angle BAC=60^\circ$，則$\overline{CH}=$________。

答案：$3\sqrt{3}$



解析：設$\overline{OA}=a, \overline{OB}=b, \overline{OC}=c$

$a^2+b^2=16\cdots\cdots①$，$a^2+c^2=36\cdots\cdots②$

$b^2+c^2=4^2+6^2-2\cdot4\cdot6\cdot\cos60^\circ=16+36-24=28\cdots\cdots③$

①−②：$b^2-c^2=-20\cdots\cdots④$

③−④：$2c^2=48 \Rightarrow c^2=24 \Rightarrow c=2\sqrt{6} \Rightarrow a=2\sqrt{3}, b=2$

又$\triangle OAB$中，$\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot2=\frac{1}{2}\cdot4\cdot\overline{OH} \Rightarrow \overline{OH}=\sqrt{3}$

$\triangle OCH$中，$\overline{CH}^2=3+24=27 \Rightarrow \overline{CH}=3\sqrt{3}$

F、若$0^\circ<\theta<90^\circ$，且$\cos\theta-\sin\theta=\frac{1}{2}$，則$\tan^2\theta-\frac{1}{\tan^2\theta}=$________。

答案：$-\frac{16\sqrt{7}}{9}$

解析：$\because \cos\theta-\sin\theta=\frac{1}{2}$，$\therefore \cos^2\theta-2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow 1-2\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{4} \Rightarrow \cos\theta\cdot\sin\theta=\frac{3}{8}$

考慮$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+2\cdot\frac{3}{8}=\frac{7}{4}$

又θ為銳角，故$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}$

$$\therefore \tan^2\theta-\frac{1}{\tan^2\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^4\theta-\cos^4\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{(\sin^2\theta-\cos^2\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{(\frac{3}{8})^2}$$

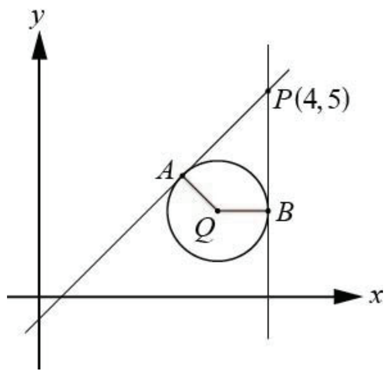
$$=\frac{64}{9}\cdot(\sin\theta-\cos\theta)(\sin\theta+\cos\theta)$$

$$=\frac{64}{9}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}=-\frac{16\sqrt{7}}{9}$$

G、過$P(4,5)$對圓$C:(x-3)^2+(y-2)^2=1$所作之切線方程式為________。

答案：$4x-3y=1,\ x=4$

解析：



$Q(3,2),\ r=1$，令切線 $L: y-5=m(x-4) \Rightarrow mx-y+5-4m=0$

$d(Q,L)=r \Rightarrow \dfrac{|3m-2+5-4m|}{\sqrt{m^2+1}}=1 \Rightarrow |3-m|=\sqrt{m^2+1} \Rightarrow m^2-6m+9=m^2+1$

$\Rightarrow 6m=8 \Rightarrow m=\dfrac{4}{3} \Rightarrow L: y-5=\dfrac{4}{3}(x-4) \Rightarrow 3y-15=4x-16$

$\Rightarrow 4x-3y=1$ 或 $x=4$ (鉛直)

答案卷

第壹部分： 選擇題（占 65 分）

一、 單選題（占 35 分）

1　2	2　3	3　4	4　5	5　4	6　5	7　1

二、 多選題（占 30 分）

8　13	9　1234	10　124	11　235	12　135	13　123

第貳部分： 選填題（占 35 分）

A　$1<t<\frac{5}{2}$	B　49	C　11
D　10	E　$3\sqrt{3}$	F　$-\frac{16\sqrt{7}}{9}$
G　$4x-3y=1,\ x=4$		