102年 學科能力測驗模擬試題 數學科

答案與解析

答案

第壹部分：選擇題

1.	**2**	2.	**2**	3.	**1**	4.	**4**	5.	**2**	6.	**2**	7.	**4**	8.	**14**	9.	**245**	10.	**13**
11.	**135**	12.	**34**	13.	**123**	14.	**15**												

第貳部分：選填題

15.	**1**	16.	**4**	17.	**4**	18.	**4**	19.	**6**	20.	**0**	21.	**3**	22.	**5**	23.	**2**	24.	**3**
25.	**1**	26.	**5**	27.	**4**	28.	**1**	29.	**3**	30.	**5**	31.	**1**	32.	**8**				

解析

第壹部分：選擇題

1. 答案 **2**

概念中心 對數之應用、對數表

解析 $7.0=-\log[H^+]_{水}$……①

$7.8=-\log[H^+]_{溶液}$ …②

②－①得 $0.8=\log[H^+]_{水}-\log[H^+]_{溶液}$

$\therefore \log\dfrac{[H^+]_{水}}{[H^+]_{溶液}}=0.8$，

由查表得 $\dfrac{[H^+]_{水}}{[H^+]_{溶液}}=6.31$

∴ 接近 6.5 倍，故選(2)

2. 答案 **2**

概念中心 二項式定理

解析 $(1.02)^{10}=(1+0.02)^{10}$

$=C_0^{10}+C_1^{10}(0.02)+C_2^{10}(0.02)^2+C_3^{10}(0.02)^3+\cdots$

$=1+0.2+0.018+0.00096+\cdots$

≈ 1.21896

所求≈ 10000×1.21896＝12189.6，接近 12200

故選(2)

3. 答案 **1**

概念中心 機率

解析 所求$=\dfrac{\dfrac{C_2^6C_2^4C_2^2}{3!}\times 3!}{3^6}=\dfrac{90}{729}=\dfrac{10}{81}$

故選(1)

4. 答案 **4**

概念中心 中位數

解析 資料共有 9 個數值 $\therefore Me=x_5$

又取出的 6 個數值為 5，7，7，10，13，16

∴ Me 最大值為 13

故選(4)

5. 答案 **2**

概念中心 三角函數之定義

解析 $\because \angle B=\angle CEF=90°$

$\therefore \beta+\angle CEB=90°=\angle CEB+\angle AEF$

$\therefore \angle AEF=\beta$

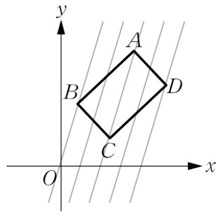
$\therefore \overline{AE}=\overline{EF}\cos\angle AEF=\overline{CF}\sin\alpha\cdot\cos\beta$

$=1\cdot\sin\alpha\cos\beta=\sin\alpha\cos\beta$

故選(2)

6. 答案 **2**

概念中心 線性規劃



解析 設 L：$3x-2y=k$，

則所求為 x 截距之最小值

又 $m_{\overline{BC}}=-1$，$m_{\overline{AB}}=1$，

$m_L=\dfrac{3}{2}$

∴ 由圖可知，過 B 點即為所求，故選(2)

7. 答案 **4**

概念中心 面積、行列式

解析 設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，

$2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}=(2a_1-3b_1,2a_2-3b_2)$，

$\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}=(a_1+2b_1,a_2+2b_2)$

$\because \left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|=4$

$\therefore \left|\begin{vmatrix} 2a_1-3b_1 & 2a_2-3b_2 \\ a_1+2b_1 & a_2+2b_2 \end{vmatrix}\right|$

$=\left|\begin{vmatrix} 2a_1-3b_1 & 2a_2-3b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2a_1-3b_1 & 2a_2-3b_2 \\ 2b_1 & 2b_2 \end{vmatrix}\right|$

$=\left|\begin{vmatrix} -3b_1 & -3b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_2 \\ 2b_1 & 2b_2 \end{vmatrix}\right|$

$=\left|3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|$

$=7\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|=7\times 4=28$

故選(4)

8. 答案 **14**

概念中心 循環小數、根式、實數、絕對值

解析 (1) $0.\overline{29}+0.\overline{71}=\dfrac{29}{99}+\dfrac{71}{99}=\dfrac{100}{99}>1$

(2) 反例：$5>1$，$-1>-3$，

但 $5\cdot(-1)<1\cdot(-3)$

(3) 反例：$2>-3$，但$\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{-3}$

(4) $|x-3|+|x+4|\geq|(x-3)-(x+4)|=7$

∴ $|x-3|+|x+4|<6$ 無實數解

(5) 反例：$3+\sqrt{8}=3+2\sqrt{2}=(3+\sqrt{2})+\sqrt{2}$，

但 $3\neq 3+\sqrt{2}$，$\sqrt{8}\neq\sqrt{2}$

故選(1)(4)

9. 答案 **245**

概念中心 一次因式檢驗法、共軛根成對、勘根定理

解析 (1) 整係數時才成立

(2) $\deg f(x)=3$，$f(1-i)=0$

∴ $f(1+i)=0$ ∴ $f(3+i)\neq 0$

(3) 不一定成立

(4) $f(2+i)=0$ ∴ $f(2-i)=0$

又 $f(-1)<0$，$f(1)>0$

∴ 第三根在 -1 與 1 之間 ∴ $f(3)>0$

(5) $f(x^3)=x^2-5x+1$ 為 9 次實係數方程式

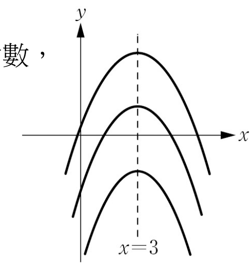
∴ 必有實根，即存在 $\alpha\in\mathbb{R}$ 滿足

$f(\alpha^3)=\alpha^2-5\alpha+1$

故選(2)(4)(5)

10. 答案 **13**

概念中心 二次函數之圖形



解析 $f(x)=ax^2+bx+c$ 為二次函數，

且 $f(3+t)=f(3-t)$

∴ 對稱軸為 $x=3$，

又 $f(1)>f(0)$

∴ 開口向下 ∴ $a<0$

(1) $f(-2)>f(-3)$

(2) $f(5)=f(1)<f(2)$

(3) $-\dfrac{b}{2a}=3$ ∴ $b=-6a>0$

(4) 無法確定 c 之正負

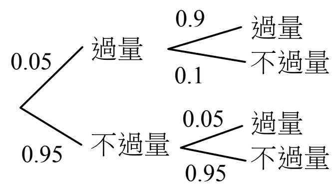
(5) 無法確定 b^2-4ac 之正負

故選(1)(3)

11. 答案 **135**

概念中心 貝氏定理、乘法原理

解析



(1) 所求 $=0.05\times 0.9+0.95\times 0.05$

$=0.0925<0.2$

(2) 所求 $=0.05\times 0.1+0.95\times 0.95$

$=0.9075>0.9$

(3) 所求 $=\dfrac{0.95\times 0.95}{0.05\times 0.1+0.95\times 0.95}=\dfrac{0.9025}{0.9075}$

$\approx 0.9945>0.99$

(4) 所求 $=\dfrac{0.05\times 0.9}{0.05\times 0.9+0.95\times 0.05}=\dfrac{0.045}{0.0925}$

$\approx 0.4865<0.5$

(5) 所求 $=\dfrac{0.95\times 0.05}{0.05\times 0.9+0.95\times 0.05}=\dfrac{0.0475}{0.0925}$

$\approx 0.5135<0.6$

故選(1)(3)(5)

12. 答案 **34**

概念中心 相關係數、迴歸直線

解析 (1)(2) 迴歸直線過 $(60,70)$，$(20,40)$

$\therefore \begin{cases} 70=a+60b \\ 40=a+20b \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} a=25 \\ b=\dfrac{3}{4} \end{cases}$

∴ $y=25+\dfrac{3}{4}x$，斜率 $m=\dfrac{3}{4}$，

且 $50\neq 25+\dfrac{3}{4}\cdot 30$ ∴ 不過 $(30,50)$

(3) $m=\dfrac{3}{4}=r\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=0.9\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$ ∴ $\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=\dfrac{5}{6}$

∴ $\sigma_x>\sigma_y$

(4) $y_{31}=25+\dfrac{3}{4}\cdot 72=79<80$

(5) $x_i'=\dfrac{x_i-\mu_x}{\sigma_x}$，$y_i'=\dfrac{y_i-\mu_y}{\sigma_y}$

$\therefore \sigma_x'=1$，$\sigma_y'=1$，$r'=r$

$\therefore m'=r'\cdot\dfrac{\sigma_x'}{\sigma_y'}=r\cdot\dfrac{1}{1}=r=0.9$

故選(3)(4)

13. 答案 **123**

概念中心 廣義角三角函數、比大小、半角

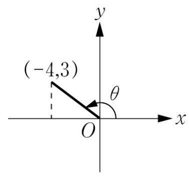
解析 (1) $\sin 321°=-\sin 39°$，

$\tan 321°=-\tan 39°$

$\because \tan 39°>\sin 39°>0$

$\therefore -\tan 39°<-\sin 39°$，

即 $\sin 321°>\tan 321°$



(2) $\cos(A+B)=\cos(180°-C)$

$=-\cos C=-\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\in\mathbb{Q}$

(3) $270°<\theta<360°$

$\therefore 135°<\dfrac{\theta}{2}<180°$，又 $\cos\theta=\dfrac{3}{4}$

$\therefore \tan=-\dfrac{\theta}{2}=-\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

$=-\sqrt{\dfrac{1}{7}}<-\dfrac{1}{\sqrt{7}}<-\dfrac{1}{3}$

(4) $\because$ $0°<\angle A<180°$

$\therefore \cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}$ 或 $-\sqrt{1-\sin^2 A}$

(5) $\sin(90°+\theta)=\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$

故選(1)(2)(3)

14. 答案 **15**

概念中心 夾角、重心、正射影、外積

解析 (1) $\overrightarrow{AB}=(2,2,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-5,-1,-6)$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{-10-2-6}{3\cdot\sqrt{62}}<0$

$\therefore$ $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 之夾角為鈍角

(2) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB}$

$=\left(\begin{vmatrix}2&1\\-1&-6\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\-6&-5\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&2\\-5&-1\end{vmatrix}\right)$

$=(-11,7,8)$

(3) $ABCD$ 為平行四邊形

$\therefore D(-8,-1,-3)$

(4) 重心 $D\left(-2,\dfrac{7}{3},\dfrac{7}{3}\right)$

$\therefore a-b+c=-2<0$

(5) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 之正射影

$=\left(\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2}\right)\overrightarrow{AB}$

$=-\dfrac{18}{9}(2,2,1)$

$=(-4,-4,-2)$

$\therefore (a+1,b-2,c-4)=(-4,-4,-2)$

$\therefore$ $D(-5,-2,2)$

$\therefore a+b-c=-5-2-2=-9$ 為 3 的倍數

故選(1)(5)

第貳部分：選填題

A. 答案 **144**

概念中心 餘式定理、因式定理

解析 設 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(ax+b)+24$，

又 $x^2-9x+20\mid f(x)$

$\therefore f(4)=f(5)=0$，

$\begin{cases}3\cdot2\cdot1\cdot(4a+b)=-24\\4\cdot3\cdot2\cdot(5a+b)=-24\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}4a+b=-4\\5a+b=-1\end{cases}$ $\therefore a=3$，$b=-16$

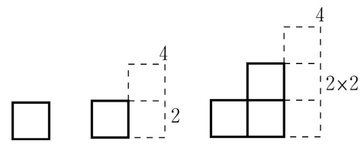
故 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(3x-16)+24$，

所求 $=f(6)=5\cdot4\cdot3\cdot2+24=144$

B. 答案 **460**

概念中心 遞迴數列

解析



$a_1=4$，$a_2=a_1+4+2$，$a_3=a_2+4+2\cdot2$

$\therefore a_n=a_{n-1}+4+2\cdot(n-1)$

$=a_{n-1}+2n+2$，$n\geq2$

$\therefore$ $a_1=4$

$a_2=a_1+2\cdot2+2$

$a_3=a_2+2\cdot3+2$

$\vdots$

$+)\ a_n=a_{n-1}+2\cdot n+2$

$a_n=4+2\cdot(2+3+\cdots+n)+2(n-1)$

$=4+2\cdot\left[\dfrac{n(n+1)}{2}-1\right]+2n-2$

$=4+n^2+n-2+2n-2=n^2+3n$

$\therefore a_{20}=20^2+3\cdot20=460$

C. 答案 $\dfrac{\mathbf{35\sqrt{2}}}{\mathbf{3}}$

概念中心 三角測量

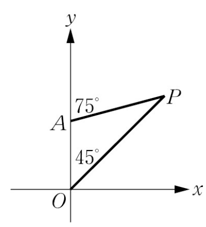
解析 $\overline{OA}=70\times\dfrac{10}{60}=\dfrac{35}{3}$，

$\angle P=75°-45°=30°$

$\therefore \dfrac{\overline{AP}}{\sin 45°}=\dfrac{\overline{OA}}{\sin 30°}$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{AP}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\dfrac{35}{3}}{\dfrac{1}{2}}$

$\therefore \overline{AP}=\dfrac{35\sqrt{2}}{3}$



D. 答案 $\dfrac{\mathbf{15}}{\mathbf{4}}$

概念中心 線性組合、共線

解析 $\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}=\dfrac{k}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3k}{8}\overrightarrow{AC}$

$\because B$，Q，C 共線

$\therefore \frac{k}{4}+\frac{3k}{8}=1$，$\frac{5k}{8}=1 \Rightarrow k=\frac{8}{5}$

$\therefore \overrightarrow{AQ}=\frac{8}{5}\overrightarrow{AP}$ $\therefore \overline{AP}:\overline{PQ}=5:3$，

又 $\overline{AQ}=10$ $\therefore \overline{PQ}=\frac{3}{8}\overline{AQ}=\frac{15}{4}$

E. 答案 $\mathbf{\frac{1}{3}}$

概念中心 垂直

解析 坐標化 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$D(0,1,0)$，$E(0,0,1)$，$H(0,1,1)$，$P(1,0,\frac{1}{2})$，$Q(1,t,0)$

$\therefore \overrightarrow{PH}=(-1,1,\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{PQ}=(0,t,-\frac{1}{2})$

$\because \angle HPQ=90°$ $\therefore \overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{PQ}=t-\frac{1}{4}=0$

$\therefore t=\frac{1}{4}$，$Q(1,\frac{1}{4},0)$ $\therefore \overline{BQ}=\frac{1}{4}\overline{BC}$

$\therefore \overline{BQ}=\frac{3}{4}\overline{BC}$，$\overline{BQ}=\frac{1}{3}\overline{CQ}$ $\therefore k=\frac{1}{3}$

F. 答案 $\mathbf{\frac{5}{18}}$

概念中心 轉移矩陣

解析 考慮甲袋中球之轉移情形如右：

2 紅
- 2紅：0
- 1紅1白：1
- 2白：0

1 紅 1 白
- 2紅：$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$
- 1紅1白：$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$
- 2白：$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

2 白
- 2紅：0
- 1紅1白：$\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$
- 2白：$1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

$$\therefore \text{轉移矩陣 } A=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{6} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}，X_0=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\therefore X_1=AX_0=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{6} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},$$

$$X_2=AX_1=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{6} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix},$$

$$X_3=AX_2=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{6} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{12}\\ \frac{23}{36}\\ \frac{5}{18}\end{bmatrix}$$

$\therefore$ 2 白球之機率為$\frac{5}{18}$