103年 學科能力測驗模擬試題 數學科

答案與解析

答案

第壹部分：選擇題

1.	**4**	2.	**2**	3.	**3**	4.	**5**	5.	**3**	6.	**1**	7.	**234**	8.	**245**	9.	**124**	10.	**1235**
11.	**1235**	12.	**123**	13.	**125**														

第貳部分：選填題

14.	**4**	15.	**1**	16.	**3**	17.	**−**	18.	**1**	19.	**9**	20.	**1**	21.	**2**	22.	**5**	23.	**6**
24.	**3**	25.	**3**	26.	**1**	27.	**2**	28.	**1**	29.	**5**	30.	**2**	31.	**2**	32.	**1**	33.	**6**
34.	**2**	35.	**5**	36.	**6**	37.	**4**												

解析

第壹部分：選擇題

1. 答案 **4**

概念中心 (1) 空間中二平面的夾角

(2) 銳角 α、β，若 $\cos\alpha<\cos\beta$，則 $\alpha>\beta$

解析 若二平面的法向量 $\overrightarrow{n_1}$ 與 $\overrightarrow{n_2}$ 之夾角 θ，

則該二平面的夾角為 θ 或 $180°-\theta$。

(1) $\cos\theta=\dfrac{(1,1,1)\cdot(1,-2,3)}{\sqrt{3}\sqrt{14}}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{3}\sqrt{14}}$。

(2) $\cos\theta=\dfrac{(1,1,1)\cdot(1,3,-2)}{\sqrt{3}\sqrt{14}}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{3}\sqrt{14}}$。

(3) $\cos\theta=\dfrac{(1,1,1)\cdot(2,-1,-3)}{\sqrt{3}\sqrt{14}}$

$=\dfrac{-2}{\sqrt{3}\sqrt{14}}$。

(4) $\cos\theta=\dfrac{(1,1,1)\cdot(2,3,1)}{\sqrt{3}\sqrt{14}}$

$=\dfrac{6}{\sqrt{3}\sqrt{14}}$。

(5) $\cos\theta=\dfrac{(1,1,1)\cdot(3,-1,2)}{\sqrt{3}\sqrt{14}}$

$=\dfrac{4}{\sqrt{3}\sqrt{14}}$。

選(4)。

2. 答案 **2**

概念中心 (1) 實數之大小比較

(2) 直線之斜率的大小與其傾斜程度有關

解析 <法 1>

比較 $a=\sqrt{101}-\sqrt{99}$ 與

$b=\sqrt{103}-\sqrt{101}$ 之大小，

由 $(\sqrt{101}-\sqrt{99})-(\sqrt{103}-\sqrt{101})$

$=(\sqrt{101}+\sqrt{101})-(\sqrt{103}+\sqrt{99})$

$\because (\sqrt{101}+\sqrt{101})^2-(\sqrt{103}+\sqrt{99})^2$

$=2(\sqrt{10201}-\sqrt{10197})$

>0

$\therefore a-b>0 \Rightarrow a>b$

$\because c=\dfrac{(\sqrt{103}-\sqrt{101})+(\sqrt{101}-\sqrt{99})}{2}$

$=\dfrac{b+a}{2}$

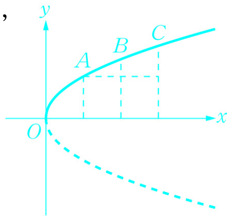
$\therefore a>c>b$

選(2)。

<法 2>

取 $y=\sqrt{x} \Rightarrow y^2=x$，$x\geq 0$，

圖形如右。



取 $A(99,\sqrt{99})$、

$B(101,\sqrt{101})$、

$C(103,\sqrt{103})$

$\Rightarrow$ 斜率 $m_{AB}>m_{AC}>m_{BC}$

$\Rightarrow \dfrac{a}{2}>\dfrac{c}{2}>\dfrac{b}{2} \Rightarrow a>c>b$，

選(2)。

3. 答案 **3**

概念中心 指數律與指數函數

解析 $2^{20}=4^{10}<5^{10}$，

$3^{15}=27^5>25^5=5^{10}$，

$4^{12}=256^3>243^3=3^{15}$，

$4^{12}=64^4>49^4=7^8$，

選(3)。

4. 答案 **5**

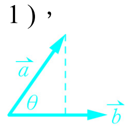
概念中心 (1) $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 之方向上的正射影

(2) 平面上直線 $ax+by+c=0$ 的法向量為 (a,b)

解析 直線 $x+y=5$ 的一個法向量為 $(1,1)$，

取方向向量 $\vec{b}=(-1,1)$。

設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角 θ，



由題意：

$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的正射影為

$(|\vec{a}|\cos\theta)\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2})\vec{b}$

$\Rightarrow \dfrac{-1+k}{2}(-1,1)=(-3,3) \Rightarrow k=7$，

選(5)。

5. 答案 **3**

概念中心 矩陣的乘法與反矩陣

解析 $AX=X+A \Rightarrow (A-I)X=A$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow X=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$=\dfrac{1}{1}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

$\therefore a+b+c+d=6$

選(3)。

6. 答案 **1**

概念中心 (1) 等差數列的一般項與有關 $\sum$ 的運算

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n} k=?\ \sum\limits_{k=1}^{n} k^2=?$

解析 $\langle a_n\rangle$ 之公差 d：$5=a_3=a_1+2d \Rightarrow d=2$。

$\langle b_n\rangle$ 之公差 e：$2=b_4=b_1+3e \Rightarrow e=-1$。

$\sum\limits_{k=1}^{20} a_k b_k$

$=\sum\limits_{k=1}^{20}[1+(k-1)\cdot 2][5+(k-1)\cdot(-1)]$

$=\sum\limits_{k=1}^{20}(2k-1)(-k+6)=\sum\limits_{k=1}^{20}(-2k^2+13k-6)$

$=(-2)\sum\limits_{k=1}^{20}k^2+13\cdot\sum\limits_{k=1}^{20}k-6\times 20$

$=(-2)\cdot\dfrac{20\cdot 21\cdot 41}{6}+13\cdot\dfrac{20\cdot 21}{2}-120$

$=-3130$，

選(1)。

7. 答案 **234**

概念中心 偶函數之定義、指數之性質、根式的改變

解析 (1) $f(-x)=-x^5-4x^2+8\neq f(x)$。

(2) $f(-x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}$

$=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=f(x)$。

(3) $f(-x)=2^{-x}+\dfrac{1}{2^{-x}}=\dfrac{1}{2^x}+2^x=f(x)$。

(4) $f(-x)=\log_2|-x^3|=\log_2|x^3|=f(x)$。

(5) $f(-x)=\log(-x+\sqrt{x^2+1})$

$=\log\dfrac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$=\log\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-f(x)$。

選(2)(3)(4)。

8. 答案 **245**

概念中心 (1) 複係數的多項方程有虛根，不一定有共軛虛根

(2) 分解因式

(3) 勘根

解析 (1) 複係數方程式，設另一根 α，

由根與係數得 $(2+i)+\alpha=2 \Rightarrow \alpha=i$。

(2) $x^4-3x^2-4=(x^2-4)(x^2+1)=0$，

有一正實根 2。

(3) 設 $x^2-3x-5=(x-\alpha)(x-\beta)$，

其中 $\beta<0$

∴ $x^4-3x^2-5=(x^2-\alpha)(x^2-\beta)=0$，

必有一正根為 $\sqrt{\alpha}$

(4) 設 $f(x)=x^5-2014x+103$

∵ $f(0)=103>0$，$f(1)<0$，$f(20)>0$

∴ $f(x)=0$ 在 0 與 1 之間有根，

在 1 與 20 之間也有根

(5) $3^x-x+2=0$

⇔ $3^x=x-2$，

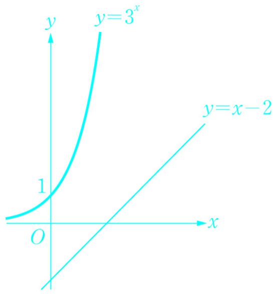
考慮 $y=3^x$ 圖形

與直線 $y=x-2$

是否有交點，

如右圖，沒有交點

⇒ 沒有實數解。



選(2)(4)(5)。

9. 答案 **124**

概念中心 組合

解析 (1) 10 個等分點，恰是 5 條直徑的端點，

所求直線有 $C^{10}_2-5=40$(條)。

(2) 圓上的點，任意三點不共線

⇒ 三角形有 C^{10}_3 個

(3) 正三角形的每邊對應的圓弧等長

∴ 這 10 個點不能產生正三角形

(4) 矩形的對角線必須是直徑，

二條直徑可確定一個矩形

∴ 矩形有 $C^5_2=10$(個)

(5) 正方形的每邊對應的圓弧等長

∴ 這 10 個點不能產生正方形

選(1)(2)(4)。

10. 答案 **1235**

概念中心 (1) 坐標化

(2) 空間中向量的內積、外積

(3) 點到面的距離

解析 (1) ∵ $\overline{AB}$ 垂直平面 ADE

∴ $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

(2) 設 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AG}$ 之夾角 θ

∵ $\overline{AB}\perp\overline{BG}$

∴ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AG}|\cos\theta$

$=|\overrightarrow{AB}|^2=4$

(3) 向量 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AG}$ 垂直平面 $ABCD$

∵ $\overline{GH}$ 平行平面 $ABCD$

∴ $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\perp\overrightarrow{GH}$

⇒ $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{GH}=0$

(4)(5) 坐標化：取 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，

$D(0,3,0)$，$E(0,0,2)$，$G(2,3,2)$，

$H(0,3,2)$

⇒ $\triangle BHE$ 之重心 $K(\frac{2}{3},1,\frac{4}{3})$，

$\overrightarrow{AG}=(2,3,2)$

∵ $\overrightarrow{AK}=(\frac{2}{3},1,\frac{4}{3})\nparallel\overrightarrow{AG}$

∴ 重心 K 不在 $\overline{AG}$ 上

∵ 平面 BDE：$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1$，

即 $3x+2y+3z-6=0$

∴ 點 A 到平面 BDE 的距離為

$$\left|\frac{0+0+0-6}{\sqrt{9+4+9}}\right|=\frac{6}{\sqrt{22}}<\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

選(1)(2)(3)(5)。

11. 答案 **1235**

概念中心 (1) 對數函數的圖形

(2) 對數與指數的關係

解析 (1) 點 (p,q) 在 $y=f(x)$ 圖形上

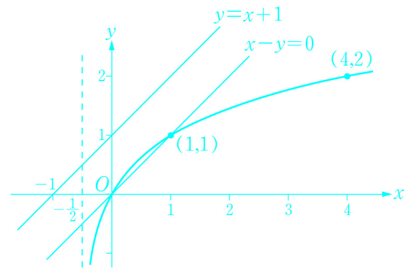
⇒ $q=\log_3(2p+1)\Rightarrow 2p+1=3^q$

⇒ $p=\frac{1}{2}(3^q-1)$

∴ 點 (q,p) 在 $y=\frac{1}{2}(3^x-1)$ 圖形上

(2)(3)(4)(5)

$f(x)=\log_3(2x+1)$ 與 $x-y=0$ 之圖形如下：



⇒ $f(-0.2)<-0.2$，$f(0.9)>0.9$，$f(3)<3$

當 $x>-\frac{1}{2}$ 時，

$y=f(x)$ 之圖形在 $y=x+1$ 圖形下方，

即 $f(x)<x+1$ 恆成立。選(1)(2)(3)(5)。

12. 答案 **123**

概念中心 互斥事件、獨立事件的定義與性質

解析 (1) $S=A\cup B\cup C$，且 A，B，C 兩兩互斥，

$1=P(S)=P(A\cup B\cup C)$

$=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-$

$P(B\cap C)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$

$=P(A)+P(B)+P(C)$。

(2) A、B 互斥 ⇒ $P(A\cap B)=0$

⇒ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。

(3) A、B 為獨立事件

⇔ $P(A\cap B)=P(A)P(B)$。

(4) A、B 互斥

⇒ $P(A\cap B)=0$ 不一定等於 $P(A)P(B)$

∴ A、B 不一定為獨立事件

(5) 條件不夠：

A，B，C 為獨立事件

⇔ ① $P(A\cap B)=P(A)P(B)$，

$P(B\cap C)=P(B)P(C)$，

$P(A\cap C)=P(A)P(C)$；

② $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$

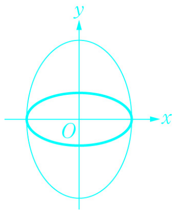
選(1)(2)(3)。

13. 答案 **125**

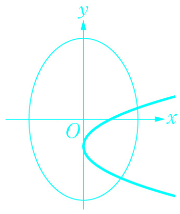
概念中心 二次曲線的圖形

解析 利用畫圖

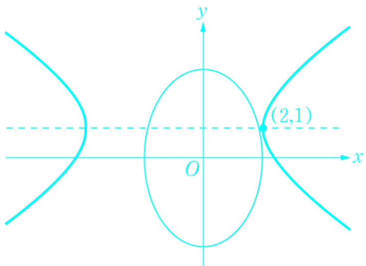
(1)



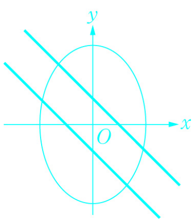
(2)



(3)

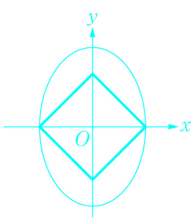


(4) $|x+y|=1 \Rightarrow x+y=\pm 1$。



(5) $|x|+|y|=2$ 圖形對稱於 x 軸與 y 軸，

當 $x\geq 0$，$y\geq 0$ 時，$x+y=2$。



選(1)(2)(5)。

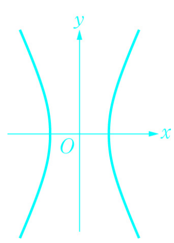
第貳部分：選填題

A. 答案 **4**

概念中心 利用有向角來表示點的坐標

解析 雙曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$

對稱於 x 軸(如圖)。



設 $\overline{OP}=r$，

令 $P(r\cos 120°, r\sin 120°)$

$=(-\dfrac{r}{2}, \dfrac{\sqrt{3}r}{2})$，

代入 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1 \Rightarrow \dfrac{r^2}{4}-\dfrac{3r^2}{16}=1$

$\Rightarrow r^2=16 \Rightarrow r=4 \Rightarrow \overline{OP}=4$。

B. 答案 $\mathbf{\dfrac{1}{3}}$

概念中心 機率

解析 $a+b+c=10$。

$a=9$ 時，$b+c=1$

$\Rightarrow (b,c)=(1,0)，(0,1)$。

$a=8$ 時，$b+c=2$

$\Rightarrow (b,c)=(2,0)，(1,1)，(0,2)$。

$a=7$ 時，$b+c=3$

$\Rightarrow (b,c)=(3,0)，(2,1)，(1,2)，(0,3)$。

$a=6$ 時，$b+c=4$

$\Rightarrow (b,c)=(4,0)，(3,1)，(2,2)，(1,3)，(0,4)$。

$a=5$ 時，$b+c=5$

$\Rightarrow (b,c)=(5,0)，(4,1)，(3,2)，(2,3)，(1,4)，(0,5)$。

$a=4$ 時，$b+c=6$

$\Rightarrow (b,c)=(6,0)，(5,1)，(4,2)，(3,3)，(2,4)，(1,5)，(0,6)$。

$a=3$ 時，$b+c=7$

$\Rightarrow (b,c)=(7,0)，(6,1)，(5,2)，(4,3)，(3,4)，(2,5)，(1,6)，(0,7)$。

$a=2$ 時，$b+c=8$

$\Rightarrow (b,c)=(8,0)，(7,1)，(6,2)，(5,3)，(4,4)，(3,5)，(2,6)，(1,7)，(0,8)$。

$a=1$ 時，$b+c=9$

$\Rightarrow (b,c)=(9,0)，(8,1)，(7,2)，(6,3)，(5,4)，(4,5)，(3,6)，(2,7)，(1,8)，(0,9)$。

上述中共有

$2+3+4+5+6+7+8+9+10=54$(種)，

其中滿足 a, b, c 中任兩個是不連續的整數者

有 $0+2+2+4+0+2+4+2+2=18$(種)，

所求機率 $=\dfrac{18}{54}=\dfrac{1}{3}$。

C. 答案 **$-$1912**

概念中心 多項式方程式的根與係數關係

解析 $x^3-103x+2014=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$\therefore \alpha^3-103\alpha+2014=0$，

$\beta^3-103\beta+2014=0$，

$\gamma^3-103\gamma+2014=0$

所求式 $=(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$

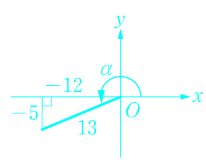
$=-(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

$=-(1-103+2014)=-1912$。

D. 答案 $\mathbf{\dfrac{56}{33}}$

概念中心 三角函數的定義與和差公式

解析 如右圖



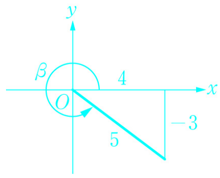
$\because 180° < \alpha < 270°$

且 $\sin\alpha=-\dfrac{5}{13}$

$\therefore \tan\alpha=\dfrac{-5}{-12}=\dfrac{5}{12}$

$\because\ 270° < \beta < 360°$

且 $\cos\beta = \dfrac{4}{5}$



$\therefore\ \tan\beta = \dfrac{-3}{4}$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

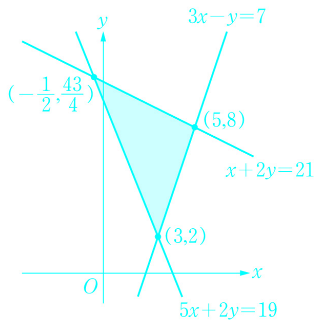
$$=\frac{\frac{5}{12}-\frac{-3}{4}}{1+\frac{5}{12}\times\frac{-3}{4}}=\frac{56}{33}$$

E. 答案 $\dfrac{1}{2}$

概念中心 線性規劃

解析 $\begin{cases} x+2y\le 21 \\ 3x-y\le 7 \\ 5x+2y\ge 19 \end{cases}$

作圖如右：



利用頂點

頂點	$(3,2)$	$(5,8)$	$(-\frac{1}{2},\frac{43}{4})$
$mx+y$	$3m+2$	$5m+8$	$-\frac{1}{2}m+\frac{43}{4}$

由題意得 $5m+8>3m+2$，

$5m+8>-\dfrac{1}{2}m+\dfrac{43}{4} \Rightarrow m>-3$，$m>\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ m>\dfrac{1}{2}$

F. 答案 $15\sqrt{22}$

概念中心 統計的標準化資料、迴歸線

解析 y 對 x 的迴歸直線方程式為

$$y-\mu_y=r\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\cdot(x-\mu_x)$$

$$\Rightarrow \frac{y-\mu_y}{\sigma_y}=r\cdot\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}，$$

標準化後，y' 對 x' 的迴歸直線方程式為

$y'=rx'$

$$\because\ \mu_x=\frac{\sum_{i=1}^{10}x_i}{10}=6，\ \mu_y=\frac{\sum_{i=1}^{10}y_i}{10}=6，$$

$$\sum_{i=1}^{10}x_i^2=382，\ \sum_{i=1}^{10}y_i^2=376，\ \sum_{i=1}^{10}x_iy_i=375$$

$$\therefore\ r=\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\mu_x)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{10}(y_i-\mu_y)^2}}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-10\cdot\mu_x\mu_y}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\mu_x^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{10}y_i^2-10\mu_y^2}}$$

$$=\frac{375-360}{\sqrt{22}\sqrt{16}}=\frac{15\sqrt{22}}{88}$$

G. 答案 $\dfrac{1625}{64}$

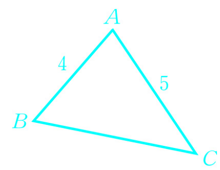
概念中心 三角形的邊角關係

解析 由餘弦定理

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\,\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos A$$

$$=16+25-2\cdot4\cdot5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=65$$

$\because\ \cos A=-\dfrac{3}{5}$



$\therefore\ \sin A=\dfrac{4}{5}$

由正弦定理

$$2R=\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\sqrt{65}}{\frac{4}{5}}\Rightarrow R=\frac{5\sqrt{65}}{8}$$

$\therefore\ \triangle ABC$ 之外接圓面積為 $\pi R^2=\dfrac{1625}{64}\pi$