104年 學科能力測驗模擬試題 數學科

答案與解析

答案

第壹部分：選擇題

1.	**4**	2.	**5**	3.	**2**	4.	**5**	5.	**1**	6.	**5**	7.	**3**	8.	**1345**	9.	**14**	10.	**12345**
11.	**25**	12.	**12345**	13.	**12345**														

第貳部分：選填題

14.	**4**	15.	**5**	16.	**－**	17.	**2**	18.	**2**	19.	**0**	20.	**9**	21.	**1**	22.	**6**	23.	**7**
24.	**1**	25.	**9**	26.	**5**	27.	**1**	28.	**1**	29.	**9**	30.	**1**	31.	**6**	32.	**9**	33.	**－**
34.	**1**	35.	**1**	36.	**0**	37.	**8**												

解析

第壹部分：選擇題

1. 答案 **4**

概念中心 Σ的概念

解析 $a_{10}=\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{9}a_k$

$=(100+10-10^2)-(100+9-9^2)$

$=-18$，

選(4)。

2. 答案 **5**

概念中心 柯西不等式

解析 由$\begin{cases}3x-y+z=-8\\x+4y-z=3\end{cases}$消去 z，得 $4x+3y=-5$

$\because (x^2+y^2)(4^2+3^2)\geq(4x+3y)^2=(-5)^2$

$\therefore x^2+y^2\geq 1$

“＝”成立時，$\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{3}$，

得 x^2+y^2 的最小值為 1。

選(5)。

3. 答案 **2**

概念中心 (1) 對數性質：$\log_a A+\log_a B=\log_a AB$，

$\log_a A^n=n\cdot\log_a A$

(2) 換底公式：$\log_a A=\dfrac{\log_b A}{\log_b a}$

解析 所求式$=(3\log_9 2)(\log_2 3+\log_2 27)$

$=(3\log_9 2)(\log_2 81)=3\log_9 81$

$=3\cdot 2=6$，

選(2)。

4. 答案 **5**

概念中心 排列組合

解析 ① 甲□…□　甲的緊鄰右邊不排乙、丙

$\Rightarrow C_1^5\times 6!=3600$。

② □…□甲　甲的緊鄰左邊不排乙、丙

$\Rightarrow C_1^5\times 6!=3600$。

③ …□甲□…　甲的緊鄰左、右不排乙、丙

$\Rightarrow P_2^5\times 5!\times 6=14400$。

有 3600＋3600＋14400＝21600(種)。選(5)。

5. 答案 **1**

概念中心 二項式定理的應用

解析 $3^{100}=9^{50}=[\,10+(-1)\,]^{50}$

$=C_0^{50}\cdot 10^{50}+C_1^{50}\cdot 10^{49}\cdot(-1)+\cdots+$

$C_{48}^{50}\cdot 10^2\cdot(-1)^{48}+C_{49}^{50}\cdot 10\cdot(-1)^{49}+$

$C_{50}^{50}\cdot(-1)^{50}$

$=100\times(\,$正整數 $P\,)-500+1$

$=100\times(\,P-5\,)+1$

$\therefore\ 3^{100}$ 以 100 除之，餘數 1

選(1)。

6. 答案 **5**

概念中心 平行四邊形面積 $=|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|$

$=\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$

解析 <法一>

所求 $=\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$

$=\sqrt{14\times21-81}=\sqrt{213}$。

<法二>

$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$

$=\left(\begin{vmatrix}1&3\\2&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&-2\\-1&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2&1\\4&2\end{vmatrix}\right)$

$=(-7,10,-8)$，

所求 $=|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\sqrt{49+100+64}=\sqrt{213}$。

選(5)。

7. 答案 **3**

概念中心 (1) 平面 $ax+by+cz+d=0$ 的法向量為 $(\,a,b,c\,)$

(2) 二向量 $\overrightarrow{n_1}$ 與 $\overrightarrow{n_2}$ 的夾角 θ，則

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$$

解析 二平面的法向量分別為 $\overrightarrow{n_1}=(\,3,-1,2\,)$，

$\overrightarrow{n_2}=(\,1,4,1\,)$，其夾角 α，

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{3-4+2}{\sqrt{14}\times\sqrt{18}}=\frac{1}{6\sqrt{7}}$$

$\because\ \theta=\alpha$ 或 $\theta=180^\circ-\alpha$

$\therefore\ \sin\theta=\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{\dfrac{251}{252}}$

選(3)。

8. 答案 **1345**

概念中心 因式分解公式的應用：

$a^2-b^2=(\,a-b\,)(\,a+b\,)$

$a^3-b^3=(\,a-b\,)(\,a^2+ab+b^2\,)$

$a^3+b^3=(\,a+b\,)(\,a^2-ab+b^2\,)$

解析 (1) $1238^2-943^2=(\,1238-943\,)(\,1238+943\,)$

$=295\times(\,1238+943\,)$。

(2) $2^{10}+3^{10}=1024+59049$

$=60073\leftarrow$不是 5 的倍數。

(3) 373^3-218^3

$=(\,373-218\,)(\,373^2+373\cdot218+218^2\,)$

$=155\times(\,373^2+373\cdot218+218^2\,)$。

(4) $37^3+28^3=(\,37+28\,)(\,37^2-37\cdot28+28^2\,)$

$=65\times(\,37^2-37\cdot28+28^2\,)$。

(5) $3^6+2^{12}=9^3+16^3$

$=(\,9+16\,)(\,9^2-9\cdot16+16^2\,)$

$=25\times(\,9^2-9\cdot16+16^2\,)$。

選(1)(3)(4)(5)。

9. 答案 **14**

概念中心 了解二次與三次函數，指數與對數函數，二次曲線的基本圖形

解析 $y=|x-1|$，

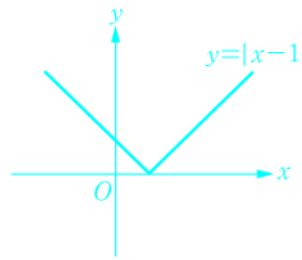
當 $x\ge1$ 時，

$y=x-1$；

當 $x\le1$ 時，

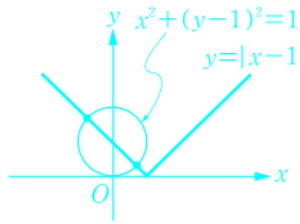
$y=1-x$，

圖如右：

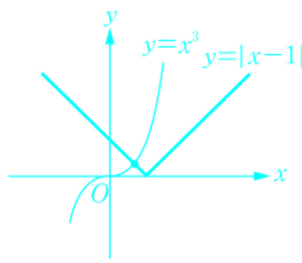


作圖如下：

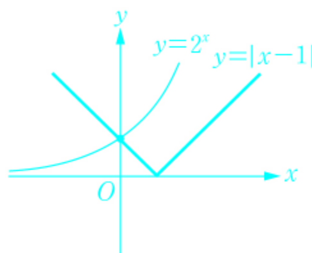
(1)



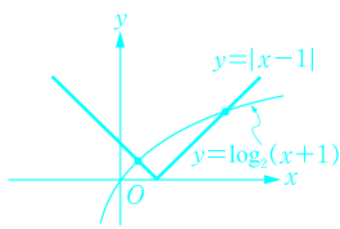
(2)



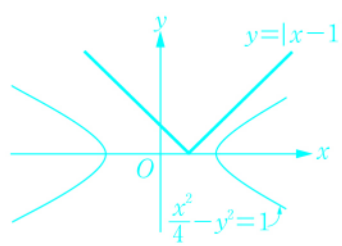
(3)



(4)



(5)



選(1)(4)。

10. 答案 **12345**

概念中心 內分點公式：

點 P 在 $\overline{AB}$ 上，$\overline{AP}$ ： $\overline{PB}$ $=m：n$，

則 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$

解析 利用內分點公式：

$\overrightarrow{OC}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$，

得右圖：

$\overrightarrow{OD}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{OB}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}\Rightarrow\overrightarrow{OB}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OD}$，

得右圖：

綜合上述得下圖：

選(1)(2)(3)(4)(5)。

11. 答案 **25**

概念中心 餘弦定理的應用：

$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=c$ 最大邊，$\angle C$ 為鈍角

$\Leftrightarrow c^2=a^2+b^2-2ab\cos C>a^2+b^2$

解析 $\triangle ABC$ 中，最大邊 c，$\angle C$ 為鈍角

$\Leftrightarrow c^2>a^2+b^2$。

(1) $5^2=3^2+4^2$，直角△。

(2) $6^2=36>34=3^2+5^2$，鈍角△。

(3) $6^2=36<41=4^2+5^2$，銳角△。

(4) $7^2=49<52=4^2+6^2$，銳角△。

(5) $9^2=81>74=5^2+7^2$，鈍角△。

選(2)(5)。

12. 答案 **12345**

概念中心 橢圓

解析 $(-2,0)$，$(0,3)$ 代入 Γ，得 $A=4$，$B=9$

$\Rightarrow$ 橢圓 Γ ：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$，

長軸長 $=2\times3=6$，短軸長 $=2\times2=4$，

如右圖，

由長方形(虛線部分)

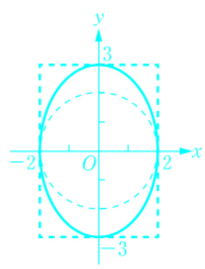
$\Rightarrow$ 橢圓之周長小於

$4\cdot(2+3)=20$，

由圓(虛線部分)

$\Rightarrow$ 橢圓的面積大於

$\pi\cdot2^2=4\pi$，



橢圓 Γ 對稱於原點

$\Rightarrow$ 點 $(-p,-q)$ 也在橢圓 Γ 上。

選(1)(2)(3)(4)(5)。

13. 答案 **12345**

概念中心 二元一次方程組 $\begin{cases}ax+by=c\\px+qy=r\end{cases}$

(1) 無解 $\Leftrightarrow\dfrac{a}{p}=\dfrac{b}{q}\neq\dfrac{c}{r}$

(2) 有無限多組解 $\Leftrightarrow\dfrac{a}{p}=\dfrac{b}{q}=\dfrac{c}{r}$

(3) 恰有一組解 $\Leftrightarrow\begin{vmatrix}a&b\\p&q\end{vmatrix}\neq0$

解析 (1)(2)(3)(4)

$\begin{cases}x+4y=1\\ax-8y=b\end{cases}$ 無解 $\Leftrightarrow\dfrac{1}{a}=\dfrac{4}{-8}\neq\dfrac{1}{b}$

$\therefore a=-2$，$b\neq-2$

$\begin{cases}x+4y=1\\3x+cy=d\end{cases}$ 不只一組解 $\Rightarrow$ 有無限多組解

$\Rightarrow\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{c}=\dfrac{1}{d}$ $\quad\therefore c=12$，$d=3$

(5) $\begin{cases}2ax+by=1\\cx+2dy=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4x+by=1\\12x+6y=-5\end{cases}$

$\begin{vmatrix}-4&b\\12&6\end{vmatrix}=-24-12b=-12(b+2)\neq0$

$\Rightarrow b\neq-2$

選(1)(2)(3)(4)(5)。

第貳部分：選填題

A. 答案 **4**

概念中心 (1) 二次式的分解

(2) 一次不等式的解法

解析 $x^2-2x-8=(x-4)(x+2)\Rightarrow p=-4$，$q=2$，

$|x-p|<q\Leftrightarrow|x+4|<2\Leftrightarrow-2<x+4<2$

$\Leftrightarrow-6<x<-2$

$\therefore$ 長度為 $(-2)-(-6)=4$

B. 答案 **5**

概念中心 (1) 平行移動的概念

(2) $ax^2+bx+c>0$ 恆成立

$\Leftrightarrow a>0$ 且 $b^2-4ac<0$

解析 $y=x^2+4x$ 向上平移 k 單位，

得新圖形為 $y-k=x^2+4x$，即 $y=x^2+4x+k$，

$y=x^2+4x+k$ 的圖形在直線 $y=2x+3$ 的上方

$\Rightarrow(x^2+4x+k)-(2x+3)$

$=x^2+2x+(k-3)>0$ 恆成立

$\therefore$ 判別式 $2^2-4(k-3)=16-4k<0$，得 $k>4$

k 的最小整數值為 5。

C. 答案 **$(-2,20)$**

概念中心 (1) 實係數多項方程式若有虛根，

則必有共軛虛根

(2) $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 三根 α、β、γ

$\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$

解析 $\because f(x)=x^3-4x^2+ax+b=0$ 為實係數方程式，

有 $3+pi$ 與 $q-i$ 的複數根，必為共軛複數

$\therefore q=3$，$p=1$，即二複數根為 $3+i$，$3-i$

另一實根為 α

$\Rightarrow$ 三根和 $4=\alpha+(3+i)+(3-i)$

$\Rightarrow\alpha=-2$，

$f(x)=(x+2)[x-(3+i)][x-(3-i)]$

$=(x+2)(x^2-6x+10)$

$=x^3-4x^2-2x+20$

$\therefore(a,b)=(-2,20)$

D. 答案 $\dfrac{91}{671}$

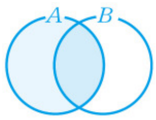
概念中心 (1) $P(A')=1-P(A)$

(2) $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

(3) 獨立事件

解析 設四次中至少一次出現過 5 點的事件為 A，四次中第三次出現 2 點的事件為 B。

所求機率為



$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(B)-P(A'\cap B)}{1-P(A')}$$

$\because P(A')=(\dfrac{5}{6})^4$，

$P(B)=1\times1\times\dfrac{1}{6}\times1=\dfrac{1}{6}$，

$P(A'\cap B)=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{5^3}{6^4}$

$$\therefore P(B|A)=\frac{\dfrac{1}{6}-\dfrac{5^3}{6^4}}{1-(\dfrac{5}{6})^4}=\frac{91}{671}$$

E. 答案 **9，5**

概念中心 相關係數

解析 相關係數 r

$$=\frac{\sum_{i=1}^{8}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{8}(x_i-\mu_x)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{8}(y_i-\mu_y)^2}}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{8}x_iy_i-8\cdot\mu_x\mu_y}{\sqrt{\sum_{i=1}^{8}x_i^2-8\mu_x^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{8}y_i^2-8\mu_y^2}}$$

$\because \mu_x=\dfrac{\sum_{i=1}^{8}x_i}{8}=\dfrac{1}{2}$，$\mu_y=\dfrac{\sum_{i=1}^{8}y_i}{8}=0$

$\therefore r=\dfrac{730-0}{\sqrt{740-2}\sqrt{806-0}}\approx\dfrac{730}{771}$

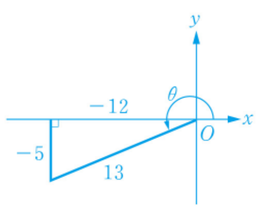
$=0.946\cdots\approx0.95\Rightarrow p=9$，$q=5$

F. 答案 $\dfrac{119}{169}$

概念中心 (1) 三角函數的定義

(2) 二倍角的公式

解析 如右圖



$\because \tan\theta=\dfrac{5}{12}$

$\therefore \cos\theta=-\dfrac{12}{13}$

$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$

$=2(-\dfrac{12}{13})^2-1=\dfrac{119}{169}$

G. 答案 **(−1，1，0，8)**

概念中心 矩陣的乘法

解析 $A^3=\begin{bmatrix}1&0\\k&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\k&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\k&2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1&0\\k&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\3k&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\7k&8\end{bmatrix}$

$\therefore 7k=-7\Rightarrow k=-1$

$a=1$，$b=0$，$c=8$