106 年 學科能力測驗模擬試題 數學科

答案與解析

答案

第壹部分：選擇題

1.	**1**	2.	**4**	3.	**4**	4.	**5**	5.	**2**	6.	**2**	7.	**25**	8.	**134**	9	**345**	10.	**25**
11.	**1234**	12.	**1235**																

第貳部分：選填題

13.	**1**	14.	**6**	15.	**2**	16.	**8**	17.	**8**	18.	**2**	19.	**2**	20.	**1**	21.	**1**	22.	**2**
23.	**1**	24.	**9**	25.	**−**	26.	**1**	27.	**2**	28.	**1**	29.	**0**	30.	**0**	31.	**1**	32.	**0**
33.	**1**	34.	**1**																

解析

第壹部分：選擇題

1. 答案 **1**

解析 $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2=10\cdots①$

$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2=6\ \cdots②$

①－②得 $4\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=4 \quad \therefore \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=1$

故選(1)。

2. 答案 **4**

解析 $\because f(x)$ 為偶函數 $\quad \therefore f(-1)=f(1)$

又 $g(x)$ 為奇函數 $\quad \therefore g(-1)=-g(1)$

$\because f(1)+g(1)=f(-1)-g(-1)$

$=(-1)^3+(-1)^2+1$

$=-1+1+1=1$

故選(4)。

3. 答案 **4**

解析 (i) 當 $x\geq 5$ 時

$\Rightarrow (x-5)+(x+3)\geq 10$

$\Rightarrow x\geq 6$，得 $x\geq 6$

(ii) 當 $-3\leq x\leq 5$ 時

$\Rightarrow -(x-5)+(x+3)\geq 10$

$\Rightarrow 8\geq 10$ (不合)。

(iii) 當 $x<-3$ 時

$\Rightarrow -(x-5)-(x+3)\geq 10$

$\Rightarrow 2x\leq -8 \Rightarrow x\leq -4$，得 $x\leq -4$。

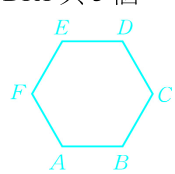
由(i)(ii)(iii)得 $x\geq 6$ 或 $x\leq -4$。

故選(4)。

4. 答案 **5**

解析 矩形只有 $ABDE$，$BCEF$，$CDFA$ 共 3 個，

所求機率$=\dfrac{3}{C^6_4}=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$，



故選(5)。

5. 答案 **2**

解析 $c=0.8^{3.1}<1$，又 $b=2^{1.1}>2$，

$a=\log_3 7=1.\cdots<2$，得 $c<a<b$。

故選(2)。

6. 答案 **2**

解析 $\because$ x 愈大，y 有愈小的趨勢　$\therefore b<0$

而當 $x=0$ 時，$y=a>0$。

故選(2)。

7. 答案 **25**

解析 $\because y=\log_a x$ 過 $(3,1)$　$\therefore 1=\log_a 3$　$\therefore a=3$

(1) ×：$y=3^{-x}=(\frac{1}{3})^x$。

(2) ○：$y=x^3$。

(3) ×：$y=(-x)^3=-x^3$。

(4) ×：$y=\log_3(-x)$ 應過 $(-3,1)$。

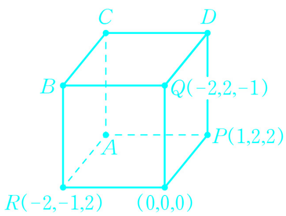
(5) ○：$y=3^x$ 過 $(1,3)$。

故選(2)(5)。

8. 答案 **134**

解析 $\because \overline{OP}=\overline{OQ}=\overline{OR}=3$

$\therefore P$，Q，R 三點皆與 O 相鄰，作圖如下：



則 A 坐標為

$(-2,-1,2)+(1,2,2)=(-1,1,4)$。

B 坐標為

$(-2,-1,2)+(-2,2,-1)=(-4,1,1)$。

C 坐標為

$(-2,-1,2)+(-2,2,-1)+(1,2,2)$

$=(-3,3,3)$。

D 坐標為

$(-2,2,-1)+(1,2,2)=(-1,4,1)$。

故選(1)(3)(4)。

9. 答案 **345**

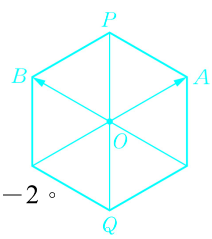
解析 當 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 時，

$x+y$ 有最大值 2；

當 $\overrightarrow{OQ}=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ 時，

$x+y$ 有最小值 -2，

即 $x+y$ 可能為 0.5，-1.5，-2。



故選(3)(4)(5)。

10. 答案 **25**

解析 (1) ×：$\sin(45^\circ+\theta)$

$=\sin 45^\circ\cos\theta+\cos 45^\circ\sin\theta$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{3}{5}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\frac{3\sqrt{2}}{5}$

平方得 $1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{18}{25}$

$\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta=\frac{-7}{25}$

$\Rightarrow \sin 2\theta=\frac{-7}{25}$。

(2) ○：$\cos(90^\circ+2\theta)=-\sin 2\theta=\frac{7}{25}$。

(3) ×：$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1+\frac{7}{25}=\frac{32}{25}$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\frac{4\sqrt{2}}{5}$

（取正　$\because \theta$ 為第二象限角）

(4) ×：$\cos(45^\circ-\theta)$

$=\cos[90^\circ-(45^\circ+\theta)]$

$=\sin(45^\circ+\theta)=\frac{3}{5}$。

(5) ○：$45^\circ+\theta$ 與 $45^\circ-\theta$ 互為餘角

$\therefore \sin^2(45^\circ+\theta)+\sin^2(45^\circ-\theta)$

$=\sin^2(45^\circ+\theta)+\cos^2(45^\circ+\theta)$

$=1$

故選(2)(5)。

11. 答案 **1234**

解析 L 必通過 $(0,0,0)$ 及 $(2,3,-1)$，

方向向量 $\overrightarrow{\ell}=(2,3,-1)$

$\therefore$ 設 L：$\begin{cases} x=2t \\ y=3t \\ z=-t \end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$

(1) ○。

(2) ○：令 $t=-2$。

(3) ○：令 $t=100$。

(4) ○：令 $t=\frac{99}{7}$。

(5) ×。

故選(1)(2)(3)(4)。

12. 答案 **1235**

解析 由 $\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+b_n \\ b_{n+1}=3b_n \end{cases}$，得 $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$。

(1) ○：$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$。

(2) ○：$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}$。

(3) ○：$\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 27 \\ 27 \end{bmatrix}$。

(4) ×：由(1)(2)(3)，可得 $a_n=b_n \Rightarrow a_{10}=b_{10}$。

(5) ○：$a_1=3$，$a_2=3^2$，$a_3=3^3$，

推得 $a_{10}=3^{10}=3^5\times3^5$

$=243\times243>30000$。

故選(1)(2)(3)(5)。

第貳部分：選填題

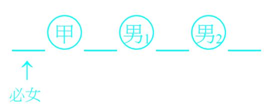
A. 答案 $\mathbf{\frac{1}{6}}$

解析 $\frac{C^6_1(P^5_3\times P^5_3)}{P^6_4\times P^6_4}=\frac{6}{6\times6}=\frac{1}{6}$。

B. 答案 **288**

解析 (i) 若甲在 3 男的最左，

$C^3_2\times2!\times(C^2_1\times C^3_1)\times2!=72$。



(ii) 若甲在 3 男的最右，同(i)為 72 種。

(iii) 若甲在 3 男的中間，

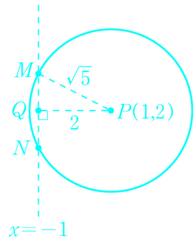
$C_2^3 \times 2! \times P_2^4 \times 2! = 144$。

＿男$_1$＿甲＿男$_2$＿

故所求為 $72+72+144=288$ (種)。

C. 答案 **2**

解析 設 $P(a,2)$ 代入 $y^2=4x$，



得 $4=4a \Rightarrow a=1$ $\therefore P(1,2)$

$\overline{PO}=\sqrt{5}$，$F(1,0)$，

$\overline{PF}=2$

又 $d(P,L)=2$

$\therefore \overline{MQ}=\sqrt{5-4}=1$

得 $\overline{MN}=2\overline{MQ}=2\times1=2$。

D. 答案 **$(\sqrt{2}, 1)$**

解析 $\because \dfrac{\overline{F_1F_2}}{\overline{DF_1}}=2\sqrt{2}$ ……………①，

又 $\dfrac{1}{2}\cdot\overline{F_1F_2}\cdot\overline{DF_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$……②，

①×②得 $\dfrac{1}{2}\overline{F_1F_2}^2=2$

$\therefore \overline{F_1F_2}^2=4 \Rightarrow \overline{F_1F_2}=2$，即 $2c=2 \Rightarrow c=1$

得 $\overline{DF_1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\overline{DF_2}=\sqrt{\dfrac{1}{2}+4}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

$\therefore 2a=\overline{DF_1}+\overline{DF_2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}$

$=2\sqrt{2}$

$\therefore a=\sqrt{2}$

$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2-1}=1$，

故數對 $(a,b)=(\sqrt{2},1)$。

E. 答案 **$\dfrac{1}{2}$**

解析 設 a，b，c 分別為 a，ar，ar^2，

則 $\cos B=\dfrac{a^2+(ar^2)^2-(ar)^2}{2(a)(ar^2)}=\dfrac{1+r^4-r^2}{2r^2}$

$=\dfrac{(\frac{1}{r^2}+r^2)-1}{2}\geq\dfrac{2\sqrt{r^2\cdot\frac{1}{r^2}}-1}{2}$

$=\dfrac{2-1}{2}=\dfrac{1}{2}$，

故最小值為 $\dfrac{1}{2}$。

F. 答案 **$(19, -12)$**

解析 設 p 是兩方程式的相同根，

則由一次因式檢驗法得 p 是 17 的因數且 p 是 16 的因數

$\therefore p=\pm1$

但 $a>0$ $\therefore$ 方程式的係數皆正

$\therefore$ 不存在正根 $\therefore p=-1$

代入得 $\begin{cases}-1+3-a+17=0\\-1+b-3+16=0\end{cases}$

$\Rightarrow a=19$，$b=-12$，

故所求數對 $(a,b)=(19,-12)$。

G. 答案 **$\dfrac{100}{101}$**

解析 $S_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5\cdot a_3=15$

$\Rightarrow a_3=3$，

又 $a_5=5$ $\therefore 5=3+2d \Rightarrow d=1$

即 $a_1=1$，$a_2=2$，…，$a_n=n$，$n\in\mathbb{N}$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{a_k\cdot a_{k+1}}$

$=\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{100\times101}$

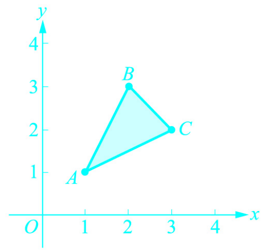
$=(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4})+\cdots$

$+(\dfrac{1}{100}-\dfrac{1}{101})$

$=1-\dfrac{1}{101}=\dfrac{100}{101}$

H. 答案 **1**

解析



$\overrightarrow{AB}=(1,2)$，$\overrightarrow{AC}=(2,1)$

$\therefore (x,y)=m(1,2)+n(2,1)$

$=(m+2n, 2m+n)$

$\Rightarrow \begin{cases}x=m+2n \cdots\cdots\cdots\cdots ①\\ y=2m+n \cdots\cdots\cdots\cdots ②\end{cases}$

②−①得 $m-n=y-x$，

(x,y)	$(1,1)$	$(2,3)$	$(3,2)$
$y-x$	0	1	-1

得 $m-n=y-x$ 的最大值為 1。