107 年 學科能力測驗模擬試題 數學科

答案與解析

答案

第壹部分：選擇題

1.	**3**	2.	**4**	3.	**4**	4.	**2**	5.	**2**	6.	**3**	7.	**245**	8.	**235**	9	**1245**	10.	**235**
11.	**345**	12.	**135**																

第貳部分：選填題

13.	**0**	14.	**5**	15.	**9**	16.	**3**	17.	**5**	18.	**1**	19.	**3**	20.	**4**	21.	**－**	22.	**5**
23.	**1**	24.	**2**	25.	**1**	26.	**0**	27.	**0**	28.	**8**	29.	**0**	30.	**6**	31.	**0**	32.	**6**
33.	**1**																		

解析

第壹部分：選擇題

1. 答案 **3**

解析 橢圓的焦點與中心的距離為$\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}$，且為橫橢圓

∴ 雙曲線亦為左右開口型雙曲線且 $c=\sqrt{11}$

故選(3)。

2. 答案 **4**

解析 $\overline{BD}^{\,2}=\sqrt{\overline{AB}^{\,2}\times\overline{BC}^{\,2}}$

$=\sqrt{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\sqrt{2}$，

故選(4)。

3. 答案 **4**

解析 $y=3(x+2)^2+4$ 表示由 $y=3x^2$ 向左移 2 單位，再向上移 4 單位而得，

點亦由 (a,b) 左移 2，上移 4，

得 $(a-2,b+4)$，

故選(4)。

4. 答案 **2**

解析 $50=10\cdot\log\dfrac{I_{50}}{10^{-12}}$

$\Rightarrow I_{50}=10^{-7}$，

$40=10\cdot\log\dfrac{I_{40}}{10^{-12}}$

$\Rightarrow I_{40}=10^{-8}$

∴ 所求 $d=10\cdot\log\dfrac{10^{-7}+20\cdot10^{-8}}{10^{-12}}$

$=10\cdot\log\dfrac{3\times10^{-7}}{10^{-12}}$

$=10\cdot\log(3\times10^{5})$

$=10\cdot(\log 3+\log 10^{5})$

$=10(0.4771+5)$

$=54.771$

≈ 55 (分貝)

故選(2)。

5. 答案 **2**

解析 設共出 n 道題目，

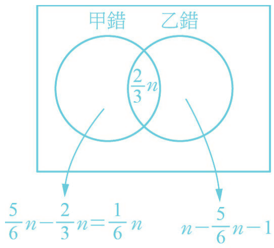
則 $\frac{2}{3}n\in\mathbb{N}$，$\frac{5}{6}n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow n$ 是 6 的倍數，

乙做錯 9 題

$\Rightarrow 9=\frac{2}{3}n+$

$\left(n-\frac{5}{6}n-1\right)$



$\Rightarrow \frac{5}{6}n=10\Rightarrow n=12$，故選(2)。

6. 答案 **3**

解析 所截線段愈長表示直線與 L_1，L_2 方向向量夾角愈小 $\Rightarrow |\cos\theta|$ 愈大，

(1) $|\cos\theta_1|=\left|\frac{(3,-4)\cdot(0,1)}{5\times1}\right|=\frac{4}{5}$

(2) $|\cos\theta_2|=\left|\frac{(3,-4)\cdot(4,3)}{5\times5}\right|=\frac{0}{25}=0$

(3) $|\cos\theta_3|=\left|\frac{(3,-4)\cdot(4,-3)}{5\times5}\right|=\frac{24}{25}$

(4) $|\cos\theta_4|=\left|\frac{(12,-5)\cdot(3,-4)}{13\times5}\right|=\frac{56}{65}$

(5) $|\cos\theta_5|=\left|\frac{(12,5)\cdot(3,-4)}{13\times5}\right|=\frac{16}{65}$

$\because \frac{24}{25}$最大

$\therefore 4x-3y=8$ 與 L_1 之夾角最小，所截線段最長

故選(3)

7. 答案 **245**

解析 $f(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)+r(x)$

$\Rightarrow f(1)=r(1)$，$f(2)=r(2)$，$f(3)=r(3)$，

即 $r(x)$ 不超過二次且 $g(x)$ 為滿足

$g(1)=2016$，$g(2)=-2017$，$g(3)=2018$

之拉格朗日插值多項式，由多項式恆等定理可得 $r(x)=g(x)$

$\therefore f(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)+g(x)$

(1) ×：無法判斷 a 之正負。

(2) ◯：$r(1)=g(1)=f(1)=2016$。

(3) ×：$g(4)=2016\times1+(-2017)\times(-3)+2018\times3>0$。

(4) ◯：$f(x)-g(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)=0$

$\Rightarrow x=1$，2，3。

(5) ◯。

故選(2)(4)(5)。

8. 答案 **235**

解析 (1) ×：$f(2)=4$，$g(2)=4$ $\therefore \alpha=2$

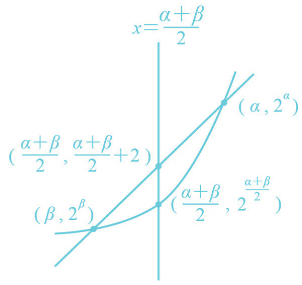
(2) ◯：$\because y=x+2$ 通過 $(-2,0)$

$\therefore \beta>-2$

(3) ◯：$\because$ 函數圖形有二個交點

$\therefore h(x)=f(x)-g(x)=0$ 有兩相異實根

(4) ×：由下圖知：



$\frac{\alpha+\beta}{2}+2>2^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$。

(5) ◯：$h(\beta-1)=f(\beta-1)-g(\beta-1)$，

由於在 β 附近 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 交會

$\therefore g(\beta-1)<f(\beta-1)$

$\therefore h(\beta-1)>0$

故選(2)(3)(5)。

9. 答案 **1245**

解析 (1) ◯：SAS 唯一解。

(2) ◯：AAS 唯一解。

(3) ×：由餘弦定理：

$1^2=2^2+c^2-2\cdot2\cdot c\cdot\cos60°$

$\Rightarrow c^2-2c+3=0\Rightarrow c$ 無實數解。

(4) ◯：由餘弦定理：

$(\sqrt{3})^2=2^2+c^2-2\cdot2\cdot c\cdot\cos60°$

$\Rightarrow c^2-2c+1=0\Rightarrow c=1$。

(5) ◯：由餘弦定理：

$3^2=2^2+c^2-2\cdot2\cdot c\cdot\cos60°$

$\Rightarrow c^2-2c-5=0$

$\Rightarrow c=1\pm\sqrt{6}$ (負不合)

$\therefore c=1+\sqrt{6}$

故選(1)(2)(4)(5)。

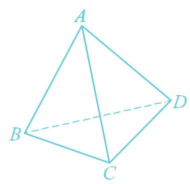
10. 答案 **235**

解析 就 $\overrightarrow{AB}$ 而言，

$\overrightarrow{AC}$ 與其夾 60°，

$\overrightarrow{CA}$ 與其夾 120°，

$\overrightarrow{CD}$ 與其夾 90°



$\therefore$ 內積可能為

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos60°=1$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos120°=-1$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos90°=0$

故選(2)(3)(5)。

11. 答案 **345**

解析 (1) ×：$\begin{cases}x=2t+1\\y=3t-2\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow 3x-2y=7$

$\Rightarrow 3x-2y+0z=7$，

為法向量是 $(3,-2,0)$，

且通過 $(1,-2,0)$ 之平面。

(2) ×：兩平行平面之交集為無圖形。

(3) ◯：為兩平面之交集為一直線。

(4) ○：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-(-1)}{1}=\dfrac{z-(-3)}{1}$

為一直線之比例式。

(5) ○：$\begin{cases} x+y-z=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ x+2y+3z=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ 2x+3y+2z=3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$

②－① 得 $y+4z=1$ ⋯⋯⋯④

②×2－③ 得 $y+4z=1$ ⋯⋯⑤

⑤－④ 得 $0=0$，

令 $z=t$，$y=1-4t$，代入① 得 $x=5t$

表一直線。

故選(3)(4)(5)。

12. 答案 **135**

解析 (1) ○：迴歸線必過 $(\mu_x,\mu_y)=(6,8)$。

(2) ×：$m=\dfrac{8-3}{6-3}=\dfrac{5}{3}$

$\therefore$ 迴歸線為 $y-3=\dfrac{5}{3}(x-3)$

$\Rightarrow y=\dfrac{5}{3}x-2$

(3) ○：$m=r\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$

$\Rightarrow \dfrac{5}{3}=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}\Rightarrow\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=\dfrac{20}{9}$

$\therefore\ \sigma_y>\sigma_x$

(4) ×：$\because$ 2 與－5 異號

$\therefore\ r'=-r=-0.75$

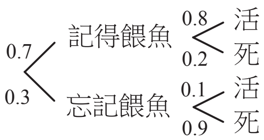
(5) ○：標準化數據 $m'=r=0.75$

故選(1)(3)(5)。

第貳部分：選填題

A. 答案 **0.59**

解析



所求＝0.7×0.8＋0.3×0.1＝0.59。

B. 答案 $\mathbf{\dfrac{3}{5}}$

解析 甲瓶原有 a 公升的水，

乙瓶原有 b 公升的水，

一輪後，

甲有$\dfrac{2}{3}a+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}a+b\right)=\dfrac{7}{9}a+\dfrac{1}{3}b$；

乙有$\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}a+b\right)=\dfrac{2}{9}a+\dfrac{2}{3}b$

$\because \begin{bmatrix} \dfrac{7}{9}a+\dfrac{1}{3}b \\ \dfrac{2}{9}a+\dfrac{2}{3}b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{7}{9} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{9} & \dfrac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$\therefore$ 轉移矩陣 $A=\begin{bmatrix} \dfrac{7}{9} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{9} & \dfrac{2}{3} \end{bmatrix}$

令穩定狀態為 $X=\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}$，則

$AX=X$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{7}{9} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{9} & \dfrac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \dfrac{7}{9}x+\dfrac{1}{3}(1-x)=x\Rightarrow x=\dfrac{3}{5}$。

C. 答案 $\mathbf{\dfrac{13}{4}}$

解析 $y^2=4x=4\cdot1\cdot x$

$\therefore$ 拋物線之焦距為 1

$\overline{VF}$ ＝橢圓中的 $a-c\Rightarrow a-c=1$，

又 $b=\dfrac{3}{2}$代入 $a^2=b^2+c^2$ 得

$a^2=\dfrac{9}{4}+(a-1)^2\Rightarrow a=\dfrac{13}{8}$

$\therefore$ 長軸長為 $2a=\dfrac{13}{4}$

D. 答案 **－512**

解析 $\because\ a_2+2a_1=0$，$a_3+2a_2=0$，$a_4+2a_3=0$，⋯，$a_{10}+2a_9=0$

$\Rightarrow a_2=-2a_1$，$a_3=-2a_2$，⋯，$a_{10}=-2a_9$

$\therefore\langle a_n\rangle$為首項 $a_1=1$，公比 $r=-2$ 的等比數列

$\therefore\ a_{10}=a_1\cdot r^9=1\cdot(-2)^9=-512$

E. 答案 **10080**

解析 將熱舞社、熱音社、民吉社、康輔社視作同物

$\dfrac{8!}{4!}\times3!=10080$（種）。

F. 答案 **60**

解析 設<u>阿花</u>的數學 x 分，

則五科為 x，70，72，74，84，

算術平均數

$\mu=\dfrac{1}{5}(x+70+72+74+84)=\dfrac{x}{5}+60$；

(1) 當 $x<72$ 時，

中位數為 72

$\Rightarrow \dfrac{x}{5}+60=72$

$\Rightarrow x=60$（合）

(2) 當 $72\le x\le74$ 時，

中位數為 x

$\Rightarrow \dfrac{x}{5}+60=x$

$\Rightarrow x=75$（不合）

(3) 當 $x>74$ 時，

中位數為 74

$\Rightarrow \dfrac{x}{5}+60=74$

$\Rightarrow x=70$（不合）

由(1)(2)(3)得 $x=60$，

故<u>阿花</u>的數學為 60 分。

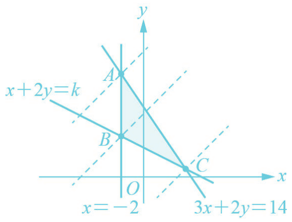
G. 答案 **6**

解析 $\begin{cases} x=-2 \\ 3x+2y=14 \end{cases}$

$\Rightarrow A(-2,10)$，

$\begin{cases} x=-2 \\ x+2y=k \end{cases}$

$\Rightarrow B\left(-2,\dfrac{k+2}{2}\right)$，



$\begin{cases} 3x+2y=14 \\ x+2y=k \end{cases}$

$\Rightarrow C\left(\dfrac{14-k}{2},\dfrac{3k-14}{4}\right)$，

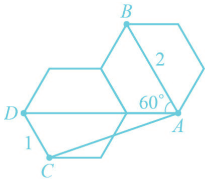
由目標函數 $P=x-y$ 得知平行線 $x-y=t$ 往右下方移動會有最大值

$\therefore C$ 產生最大值，

即 $\left(\dfrac{14-k}{2}\right)-\left(\dfrac{3k-14}{4}\right)=3\Rightarrow k=6$

H. 答案 **1**

解析



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$

$=2\cdot3\cdot\cos60^\circ+2\cdot1\cdot\cos180^\circ$

$=6\cdot\dfrac{1}{2}+2\cdot(-1)=3-2=1$。