108 年 學科能力測驗模擬試題　數學科

答案與解析

答案

第壹部分：選擇題

1.	**5**	2.	**2**	3.	**5**	4.	**3**	5.	**2**	6.	**4**	7.	**25**	8.	**24**	9	**13**	10.	**124**
11.	**13**	12.	**23**																

第貳部分：選填題

13.	**1**	14.	**3**	15.	**5**	16.	**1**	17.	**2**	18.	**3**	19.	**2**	20.	**4**	21.	**2**	22.	**1**
23.	**2**	24.	**9**	25.	**1**	26.	**8**	27.	**—**	28.	**4**	29.	**3**	30.	**5**	31.	**4**		

解析

第壹部分：選擇題

1. 答案　**5**

解析　$y=\log_a x$ 的漸近線為 y 軸，而今圖形的漸近線為 $x=-2$

$\therefore$ 新方程式圖形為 $y=\log_a x$ 左移 2 格而得，即 $y=m+\log_a(x+2)$

$\because$ 通過 $(0,0)$　$\therefore m+\log_a 2=0$ ……①

通過 $(-1,0)$　$\therefore m+\log_a 1=1$……②

由②得 $m+0=1 \Rightarrow m=1$

代入①得 $\log_a 2=-1$　$\therefore a^{-1}=2 \Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$

$\therefore m+a+b=1+\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{7}{2}$

故選(5)。

2. 答案　**2**

解析　由已知得 $\begin{cases} 9a+3b+c=0.7 \\ 16a+4b+c=0.8 \\ 25a+5b+c=0.5 \end{cases}$，

解得 $a=-0.2$, $b=1.5$, $c=-2$

$\therefore$ 函數 $p=-0.2t^2+1.5t-2$

$=-\dfrac{1}{5}t^2+\dfrac{3}{2}t-2$

$=-\dfrac{1}{5}\left(t-\dfrac{15}{4}\right)^2+\dfrac{13}{16}$

$\therefore$ 當 $t=\dfrac{15}{4}=3.75$ 時，p 有最大值

即加工時間為 3.75 分鐘最適合，故選(2)。

3. 答案　**5**

解析　取 C_1 為空間坐標原點，

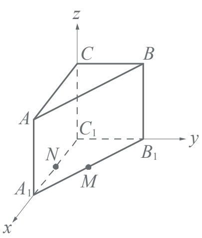
設 $\overline{BC}=\overline{CA}=\overline{CC_1}=2$

則 $A(2,0,2)$、

$B(0,2,2)$、

$N(1,0,0)$、

$M(1,1,0)$，



得 $\overrightarrow{AN}=(-1,0,-2)$、$\overrightarrow{BM}=(1,-1,-2)$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{-1+4}{\sqrt{5}\times\sqrt{6}}=\dfrac{3}{\sqrt{30}}=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$

故選(5)。

4. 答案 **3**

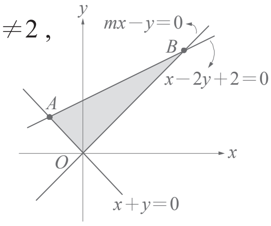
解析 A：$\begin{cases} x+y=0 \\ x-2y+2=0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\dfrac{-2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$，

B：$\begin{cases} mx-y=0 \\ x-2y+2=0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\dfrac{2}{2m+1}, \dfrac{2m}{2m-1}\right)$

∵ 目標函數 $z=2x-y$ 最大值為 2

但 $A\left(\dfrac{-2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ 代入 $z\neq 2$，

$O(0,0)$ 代入 $z\neq 2$



∴ B 代入得

$\dfrac{4}{2m-1}-\dfrac{2m}{2m-1}=2$

$\Rightarrow \dfrac{4-2m}{2m-1}=2 \Rightarrow 4-2m=4m-2 \Rightarrow m=1$

故選(3)。

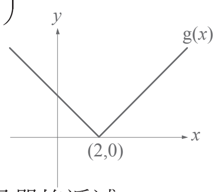
5. 答案 **2**

解析 由 $f(1)=\dfrac{1}{9}$ 得 $a^{|-2|}=\dfrac{1}{9}$

$\Rightarrow a^2=\dfrac{1}{9} \Rightarrow a=\pm\dfrac{1}{3}$（負不合）

∴ $a=\dfrac{1}{3}$，即 $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{|2x-4|}$

∵ $g(x)=|2x-4|$ 的圖形在 $x\geq 2$ 時嚴格遞增，且 $f(x)$ 函數為遞減



∴ $f(x)$ 在 $x\geq 2$ 時圖形是嚴格遞減

故選(2)。

6. 答案 **4**

解析 ∵ $L_1 // L_2$

∴ $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\cos A}{\cos B}\neq\dfrac{\cos B}{\cos A}$

$\Rightarrow b\cos B=a\cos A$

$\Rightarrow b\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=a\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\Rightarrow b^2(a^2+c^2-b^2)=a^2(b^2+c^2-a^2)$

$\Rightarrow a^4-b^4=c^2(a^2-b^2)$

$\Rightarrow (a^2+b^2)(a^2-b^2)=c^2(a^2-b^2)$

$\Rightarrow (a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2)=0$

∴ $a^2+b^2=c^2$ 或

$a^2-b^2=0$（不合 ∵ $a=b$ 造成 $L_1=L_2$）

即△ABC 為直角三角形，故選(4)。

7. 答案 **25**

解析 (1) ×：$f_1(-x)=(-x)^2\cdot\sin(-x)$

$=-x^2\cdot\sin x=-f_1(x)$

為奇函數。

(2) ○：$f_2(-x)=(-x)^2\cdot\cos(-x)$

$=x^2\cdot\cos x=f_2(x)$

為偶函數。

(3) ×：$f_3(-x)=|\log_2(-x)|$

不等於 $f_3(x)$，亦不等於 $-f_3(x)$

∴ 非奇非偶函數

(4) ×：$f_4(-x)=2^{-(-x)}=2^x$ 為非奇非偶函數。

(5) ○：$f_5(-x)=(-x)^4-7(-x)^2-9$

$=x^4-7x^2-9$

$=f_5(x)$ 為偶函數。

故選(2)(5)。

8. 答案 **24**

解析 $f(x)<0$ 之解為 $x<3$ 或 $x>8$，

則 $f(x)>0$ 之解為 $3<x<8$

∴ $f(x^2-2x)>0$ 之解為 $3<x^2-2x<8$

① 先解 $x^2-2x-3>0 \Rightarrow (x-3)(x+1)>0$

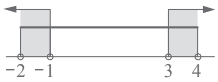
$\Rightarrow x>3$ 或 $x<-1$

② 再解 $x^2-2x<8 \Rightarrow x^2-2x-8<0$

$\Rightarrow (x-4)(x+2)<0$

$\Rightarrow -2<x<4$，

由①②得



$-2<x<-1$ 或 $3<x<4$，

故選(2)(4)。

9. 答案 **13**

解析 (1) ○：$\dfrac{1\times 5!}{6!}=\dfrac{1}{6}$。

(2) ×：$\dfrac{1\times 4!\times 1}{6!}=\dfrac{1}{30}$。

(3) ○：甲排 3 或 4 或 5 或 6 之機率為

$\dfrac{4\times 5!}{6!}=\dfrac{2}{3}$。

(4) ×：乙排 6，甲排 3 或 4 或 5 之機率為

$\dfrac{1\times 3\times 4!}{6!}=\dfrac{1}{10}$。

(5) ×：由取捨原理：

全部－甲排首－乙排末＋甲首乙末，

得 $\dfrac{6!-5!-5!+4!}{6!}=\dfrac{7}{10}$。

故選(1)(3)。

10. 答案 **124**

解析 甲組的研發成績為

1，1，1，0，0，1，1，1，0，1，0，1，1，0，1；

乙組的研發成績為

1，0，1，1，0，1，1，0，1，0，0，1，0，1，1。

(1) ○：甲組 10 分，乙組 9 分。

(2) ○：$\mu_{甲}=\dfrac{10}{15}=\dfrac{2}{3}$，

$\mu_{乙}=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$，

$\mu_{甲}>\mu_{乙}$。

(3) ×：$\sigma_{甲}=\sqrt{\frac{1}{15}\times1^2\times10-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$，

$\sigma_{乙}=\sqrt{\frac{1}{15}\times1^2\times9-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{5}$

$\Rightarrow\sigma_{甲}<\sigma_{乙}$。

(4) ○：$\because\ \mu_{甲}>\mu_{乙}$且$\sigma_{甲}<\sigma_{乙}$

$\therefore$ 甲組研發能力較乙組研發能力強

(5) ×：在抽得的 15 個結果中，

恰有一組研發成功的結果有：

$(a,\bar{b}),(\bar{a},b),(a,\bar{b}),(\bar{a},b),$

$(a,\bar{b}),(a,\bar{b}),(\bar{a},b)$ 共 7 次，

恰一組研發成功之機率為$\frac{7}{15}$。

故選(1)(2)(4)。

11. 答案 **13**

解析 (1) ○：兩平面 $x=1$ 與 $z=1$ 之交線。

(2) ×：平面 $x+y=1$ 之法向量

$\overrightarrow{n}=(1,1,0)$，

z 軸方向向量 $\overrightarrow{\ell}=(0,0,1)$

$\because\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\ell}=0$

$\therefore$ 平面與直線平行

(3) ○：$x^2+y^2=0\Rightarrow x=0$

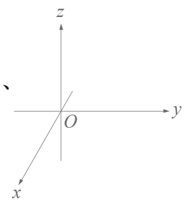
且 $y=0$，圖形為 z 軸。

(4) ×：令 L_2 上點 $p(t,t,t)$ 代入

L_1 得 $\frac{t-1}{1}=\frac{t}{2}=\frac{t+2}{-3}\Rightarrow t$ 無解

$\therefore L_1$ 與 L_2 歪斜

(5) ×：反例：如右圖，當 L_1、L_2、L_3 為 x 軸、y 軸、z 軸時，交於原點 O 但沒有共平面。



故選(1)(3)。

12. 答案 **23**

解析 由 $\begin{cases}a_{n+1}=a_n-b_n\\ b_{n+1}=a_n\end{cases}$ 得 $\begin{bmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}$

(1) ×：二階方陣 $A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}$。

(2) ○：$A^2=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}$

$\therefore\begin{bmatrix}a_2\\ b_2\end{bmatrix}=A^2\begin{bmatrix}a_0\\ b_0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$

$\therefore a_2=-1$

(3) ○：$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$。

(4) ×：由(3)得 $A^3=-I\quad\therefore A^6=I$

則 $A^{100}=(A^6)^{16}A^4=A^4=A^3A=-A$。

(5) ×：$A^{107}=(A^6)^{17}A^5=A^5=A^3A^2$

$=-A^2=\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}$，

則 $\begin{bmatrix}a_{107}\\ b_{107}\end{bmatrix}=A^{107}\begin{bmatrix}a_0\\ b_0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ b_0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}b_0\\ -a_0+b_0\end{bmatrix}$

$\because\ a_{107}>b_{107}$

$\therefore\ b_0>-a_0+b_0\Rightarrow a_0>0$

故選(2)(3)。

第貳部分：選填題

A. 答案 $\frac{1}{3}$

解析

次數	1	2	3
人數	3	3	4

次數總和為 4 次可能為 2 人皆 2 次或 1 人 1 次及 1 人 3 次兩種

$\therefore P(A)=\frac{C^3_2+C^3_1C^4_1}{C^{10}_2}=\frac{3+12}{45}=\frac{1}{3}$

B. 答案 **512**

解析 設等比數列首項為 a，公比為 r，

則 $a_1=a$，$a_2=ar$，$a_3=ar^2$

代入得 $\frac{1}{a}-\frac{1}{ar}=\frac{2}{ar^2}$

$\Rightarrow r^2-r-2=0\Rightarrow(r-2)(r+1)=0$

$\Rightarrow r=2$ 或 -1，

但 $S_6=\frac{a(1-r^6)}{1-r}=63\quad\therefore r=-1$ (不合)

當 $r=2$ 時，

$\frac{a(1-2^6)}{1-2}=63\Rightarrow a=1$，

故 $a_{10}=ar^9=1\times2^9=512$。

C. 答案 **3**

解析 $(1+\frac{x}{a})^n$

$=C^n_0+C^n_1(\frac{x}{a})+C^n_2(\frac{x}{a})^2+C^n_3(\frac{x}{a})^3+\cdots$

$+C^n_n(\frac{x}{a})^n$

$\therefore\ a_0 = C_0^n = 1$

$a_1 = \dfrac{n}{a} = 3 \cdots\cdots ①$

$a_2 = C_2^n \cdot \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{n(n-1)}{2} \cdot \dfrac{1}{a^2} = 4 \cdots\cdots ②$

由①得 $n=3a$

代入②得 $\dfrac{3a\cdot(3a-1)}{2} \cdot \dfrac{1}{a^2} = 4 \Rightarrow 9a-3=8a$

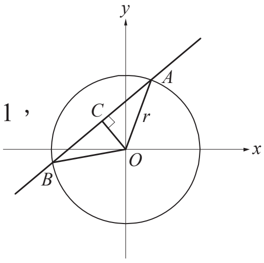
$\therefore\ a=3$

D. 答案 **2**

解析 過 O 作 $\overline{OC} \perp \overline{AB}$，

則 $\overline{OC} = d(O, \overleftrightarrow{AB})$

$= \dfrac{|0-0+5|}{\sqrt{3^2+(-4^2)}} = 1$，



又△OAB 為等腰三角形

$\therefore\ \angle AOC = 60°$

$\therefore\ \dfrac{\overline{OC}}{r} = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$

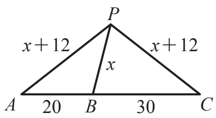
$\Rightarrow r = 2\overline{OC} = 2\times1 = 2$

E. 答案 $\mathbf{4\sqrt{21}}$

解析 $1.5\times8=12$ (浬)，

設 $\overline{PB} = x$，

則 $\overline{PA} = \overline{PC} = x+12$



$\because\ \cos(\angle ABP) = -\cos(\angle CBP)$

$\therefore\ \dfrac{20^2+x^2-(x+12)^2}{2\times20\times x} = -\dfrac{30^2+x^2-(x+12)^2}{2\times30\times x}$

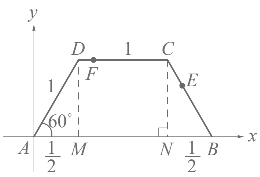
$\Rightarrow x=19 \Rightarrow x+12=31$

$\because$ △APC 為等腰三角形

$\therefore\ P$ 到 $\overline{AC}$ 距離 $= \sqrt{31^2-25^2} = 4\sqrt{21}$

F. 答案 $\mathbf{\dfrac{29}{18}}$

解析 坐標化如右



$\because\ \angle BAD = 60°$

$\therefore\ \overline{AM} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \overline{CD} = 1$

$\therefore\ A(0,0), B(2,0), C\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$D\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{DC} = (1, 0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BE} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\dfrac{-1}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$,

$\overrightarrow{DF} = \dfrac{1}{6}(1,0) = \left(\dfrac{1}{6}, 0\right)$

$\therefore\ \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$

$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF})$

$= \left[(2,0) + \left(\dfrac{-1}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right] \cdot \left[\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{6}, 0\right)\right]$

$= \left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \left(\dfrac{4}{6}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \dfrac{10}{9} + \dfrac{3}{6} = \dfrac{29}{18}$

G. 答案 $\mathbf{-\dfrac{4}{3}}$

解析 $\det A = \begin{vmatrix} -x & a \\ -b & x \end{vmatrix} = -x^2+ab = -3$,

$A^{-1} = \dfrac{1}{-x^2+ab}\begin{bmatrix} x & -a \\ b & -x \end{bmatrix}$

$= \dfrac{1}{-3}\begin{bmatrix} x & -a \\ b & -x \end{bmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -x & a \\ -b & x \end{bmatrix}$

$= \dfrac{1}{3}A$

$\therefore\ \det(A^{-1}-A)$

$= \det\left(\dfrac{1}{3}A - A\right) = \det\left(-\dfrac{2}{3}A\right)$

$= \left(\dfrac{-2}{3}\right)^2 \det A = \dfrac{4}{9}\times(-3)$

$= -\dfrac{4}{3}$

H. 答案 $\mathbf{\dfrac{5}{4}}$

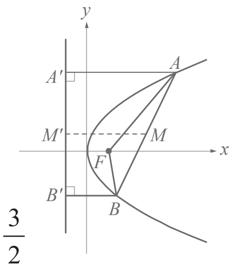
解析 由 $y^2=x$ 得 $4c=1 \Rightarrow c=\dfrac{1}{4}$

$\therefore$ 焦點 $F\left(\dfrac{1}{4}, 0\right)$，準線 $L：x=\dfrac{-1}{4}$

由拋物線定義得

$\overline{AF} = d(A, L) = \overline{AA'}$，

$\overline{BF} = d(B, L) = \overline{BB'}$



$\therefore\ \overline{AA'} + \overline{BB'} = \overline{AF} + \overline{BF} = 3$

又 M 是 $\overline{AB}$ 中點

$\therefore\ \overline{MM'} = \dfrac{1}{2}(\overline{AA'} + \overline{BB'}) = \dfrac{3}{2}$

$\therefore\ M$ 之 x 坐標 $= d(M, y$ 軸 $)$

$= \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4}$