109 年 學科能力測驗模擬試題　數學科

答案與解析

答案

第壹部分：選擇題

1.	**3**	2.	**1**	3.	**3**	4.	**2**	5.	**4**	6.	**134**	7.	**134**	8.	**24**	9	**134**	10.	**245**
11.	**124**	12.	**345**																

第貳部分：選填題

13.	**2**	14.	**3**	15.	**2**	16.	**1**	17.	**0**	18.	**2**	19.	**0**	20.	**7**	21.	**2**	22.	**1**
23.	**1**	24.	**－**	25.	**1**	26.	**1**	27.	**1**	28.	**1**	29.	**4**	30.	**4**	31.	**3**	32.	**3**
33.	**3**	34.	**2**																

解析

第壹部分：選擇題

1. 答案　**3**

解析　由 $a_{n-1}^2-2a_n^2+a_{n+1}^2=0$

$\Rightarrow a_n^2=\dfrac{a_{n-1}^2+a_{n+1}^2}{2}$ $\Rightarrow$ 〈a_n^2〉為等差數列，

令 $A_n=a_n^2$

$\therefore$ $A_2=4$，$A_6=16$

$\Rightarrow \begin{cases} A_2=A_1+d=4 \\ A_6=A_1+5d=16 \end{cases} \Rightarrow A_1=1$，$d=3$

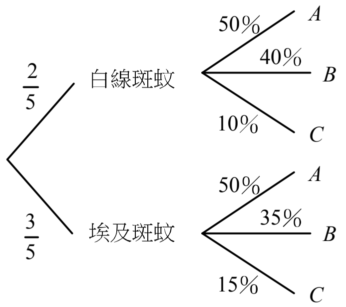
$\Rightarrow A_7=A_1+6d=1+18=19$　　$\therefore$ $a_7=\sqrt{19}$

故選(3)。

2. 答案　**1**

解析　如圖知，$\dfrac{\frac{2}{5}\times 40\%}{\frac{2}{5}\times 40\%+\frac{3}{5}\times 35\%}=\dfrac{16\%}{16\%+21\%}=\dfrac{16}{37}$，

故選(1)。



3. 答案　**3**

解析

A：

x	3	4	6	7
y	5	5	5	5

B：

x	3	4	6	7
y	3	6	5	2

C：

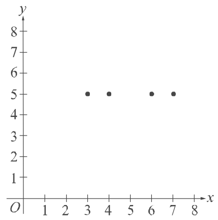
x	3	4	6	7
y	1	2	4	8

D：

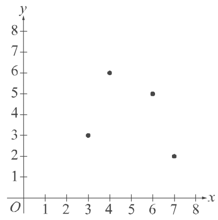
x	3	4	6	7
y	1	6	2	7

E：

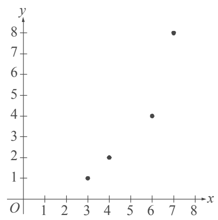
x	3	4	6	7
y	2	7	4	3



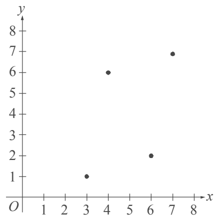
A



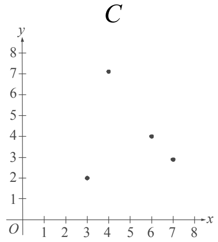
B



C



D



E

如圖，由散布圖可知產品 C 的相關係數最大，亦可由公式推得，故選(3)。

4. 答案 **2**

解析 $4(\log_a c-\log_b c)=15\log_{ab} c$

$\Rightarrow 4\left(\dfrac{1}{\log_c a}-\dfrac{1}{\log_c b}\right)=\dfrac{15}{\log_c a+\log_c b}$

$\Rightarrow 4\left(\dfrac{\log_c b-\log_c a}{\log_c a\cdot\log_c b}\right)=\dfrac{15}{\log_c a+\log_c b}$

$\Rightarrow -4(\log_c a-\log_c b)(\log_c a+\log_c b)$

$=15\log_c a\cdot\log_c b$

$\Rightarrow 4(\log_c a)^2+15\log_c a\cdot\log_c b-4(\log_c b)^2$

$=0$

$\Rightarrow (4\log_c a-\log_c b)(\log_c a+4\log_c b)=0$

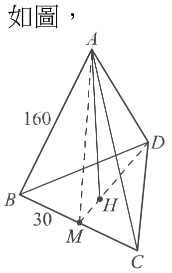
$\therefore\ 4\log_c a=\log_c b$ 或 $\log_c a=-4\log_c b$

$\Rightarrow \log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}=4$ 或 $-\dfrac{1}{4}$

又 $a>1$，$b>1$，故 $\log_a b>0\Rightarrow\log_a b=4$，故選(2)。

5. 答案 **4**

解析 如圖，



$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BM}^2}$

$=\sqrt{160^2-30^2}=10\sqrt{247}$，

$\overline{HM}=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 60\right)=10\sqrt{3}$

$\Rightarrow\overline{AH}=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{MH}^2}=$

$\sqrt{(10\sqrt{247})^2-(10\sqrt{3})^2}=20\sqrt{61}$，

故選(4)。

6. 答案 **134**

解析 (1) $x>0$，$\dfrac{x+\frac{1}{x}}{2}\geq\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}\Rightarrow x+\dfrac{1}{x}\geq 2$，

所以 $x+x^{-1}$ 的最小值為 2。

(2) $x>0$，$x\neq 1$，但 $\log x$ 不知正負，

故算幾不等式不一定成立。

(3) $2^x>0$，$2^{-x}>0$，$\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}\geq\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}$

$\Rightarrow 2^x+2^{-x}\geq 2$，所以 2^x+2^{-x} 的最小值為 2。

(4) $\dfrac{xy}{x+y}$ 取倒數 $\Rightarrow\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$，

由算幾不等式得 $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}\geq\sqrt{\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{y}}=\sqrt{\dfrac{1}{16}}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geq\dfrac{1}{2}$，故 $\dfrac{xy}{x+y}\leq 2$，

所以 $\dfrac{xy}{x+y}$ 的最大值為 2。

(5) 由算幾不等式得

$\dfrac{9^x+3^y}{2}\geq\sqrt{9^x\cdot 3^y}=\sqrt{3^{2x+y}}=\sqrt{3^2}$

$\Rightarrow 9^x+3^y\geq 6$，故 9^x+3^y 的最小值為 6。

故選(1)(3)(4)。

7. 答案 **134**

解析 (1)「笑筊」為兩平面的筊，

故機率為 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$。

(2)「聖筊」為一平面、一凸面的筊，

故機率為 $\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\right)\times 2=\dfrac{1}{2}$。

(3) 投擲連續三個「聖筊」的機率為

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$。

(4) ①「聖筊、聖筊、聖筊」機率為

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$。

②「笑筊、聖筊、聖筊、聖筊」機率為

$\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{32}$。

③「聖筊、笑筊、聖筊、聖筊」機率為

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{32}$。

④「聖筊、聖筊、笑筊、聖筊」機率為

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{32}$ 。

故機率為 $\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}=\frac{7}{32}$ 。

(5) 所求為 $(\frac{1}{2})^{60}$

$\Rightarrow\ x=(\frac{1}{2})^{60}$

$\Rightarrow\ \log x=-60\log 2\approx-18.06$

$=-19+0.94$，

故 x 為小數點後第 19 位不為 0。

故選(1)(3)(4)。

8. 答案 **24**

解析 $g(x)$ 為二次實係數，

且滿足 $g(1)=3$，$g(-1)=5$，$g(-2)=9$，

設 $g(x)=ax^2+bx+c$，

代入可得 $\begin{cases}a+b+c=3\\a-b+c=5\\4a-2b+c=9\end{cases}$

$\therefore\ a=1$，$b=-1$，$c=3$，故 $g(x)=x^2-x+3$

(1) $g(2)=5$。

(2) $D=(-1)^2-4\times1\times3<0$。

(3) 無法確定。

(4) 令 $F(x)=f(x)-g(x)$

$\Rightarrow\ \begin{cases}F(1)=f(1)-g(1)=0\\F(-1)=f(-1)-g(-1)=0\\F(-2)=f(-2)-g(-2)=0\end{cases}$

$\therefore\ F(x)$ 必有 $(x-1)(x+1)(x+2)$ 之因式

(5) 無法確定。

故選(2)(4)。

9. 答案 **134**

解析 $\langle b_n\rangle=\langle b_1,b_2,b_3,\cdots\rangle$

$\Rightarrow\langle b_n\rangle=\langle a_{2n+1}\rangle=\langle a_3,a_5,a_7,\cdots\rangle$

$\Rightarrow\ b_n$ 為等差數列，且公差為 $2d$，

又 a_n 為等差數列

$\Rightarrow\ a_{3n-2},a_{3n-1},a_{3n}$ 亦為等差數列，

故 $c_n=a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}=3\,a_{3n-1}$，

$\langle c_n\rangle=\langle c_1,c_2,c_3,\cdots\rangle$

$\Rightarrow\langle c_n\rangle=\langle 3a_{3n-1}\rangle=\langle 3a_2,3a_5,3a_8,\cdots\rangle$

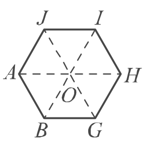
$\Rightarrow\ c_n$ 為等差數列，且公差為 $3\times3d=9d$，

故選(1)(3)(4)。

10. 答案 **245**

解析 (1) $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{AO}$

$=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AJ})$。

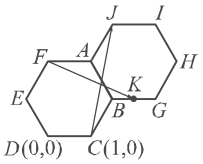


(2) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{AO}$

$=\overrightarrow{AJ}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AJ})$

$=2\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{AB}$ 。

(3) 坐標化



$B(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，

$G(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，

$J(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2})$，$F(0,\sqrt{3})$，$K(2,\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\therefore\overrightarrow{CJ}=(\frac{1}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{FK}=(2,-\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{CJ}\cdot\overrightarrow{FK}\neq0$

$\therefore\overrightarrow{CJ}$ 不垂直 $\overrightarrow{FK}$

(4) $\overrightarrow{CF}=(-1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CJ}=(\frac{1}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2})$

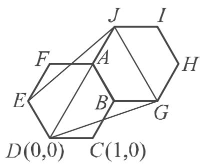
$\therefore\ \overrightarrow{CF}$ 在 $\overrightarrow{CJ}$ 上之正射影為

$$\left(\frac{\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{CJ}}{|\overrightarrow{CJ}|^2}\right)\overrightarrow{CJ}$$

$$=\left(\frac{-\frac{1}{2}+\frac{9}{2}}{\frac{1}{4}+\frac{27}{4}}\right)(\frac{1}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2})$$

$$=(\frac{2}{7},\frac{6\sqrt{3}}{7})$$

(5) $EJGD$ 之面積 $=\triangle DEJ+\triangle DJG$



$\Rightarrow\ \overrightarrow{DE}=(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，

$\overrightarrow{DJ}=(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2})$，

$\overrightarrow{DG}=(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{DE}\\\overrightarrow{DJ}\end{vmatrix}\right|+\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{DJ}\\\overrightarrow{DG}\end{vmatrix}\right|$$

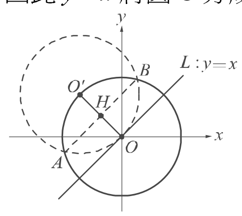
$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$$

故選(2)(4)(5)。

11. 答案 **124**

解析 (1) $y=x$ 過圓心，因此 $y=x$ 將圓 C 分成兩半圓。

(2) 如圖所示，



新圓 C' 切直線 $y=x$ 於原點 O

$\Rightarrow$ 新圓心 O' 必在 L'：$x+y=0$ 上，

且半徑為 4 $\Rightarrow$ 令 $O'(-t,t)$ $(t>0)$

且滿足 $d(O',L)=r$，L：$x-y=0$

$\therefore\ \frac{|-t-t|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=4\Rightarrow t=2\sqrt{2}$ ，

故 $O'(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$

(3) 由(2) ⇒ $(x+2\sqrt{2})^2+(y-2\sqrt{2})^2=4^2$

(4) 令 A , B 之中點為 H ⇒ $\overline{OH}=2$

∴ $\overline{O'H}=2$，$\overline{O'A}=4$

故 $\overline{AH}=\sqrt{\overline{O'A}^2-\overline{OH}^2}=2\sqrt{3}$

⇒ $\overline{AB}=4\sqrt{3}$。

(5) $\overline{AB}//L$ ⇒ 令 $L_{AB}：x-y+k=0$，

且 $d(L_{AB},L)=2$ ⇒ $\dfrac{|k-0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2$

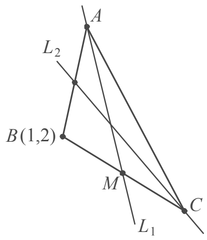
∴ $k=\pm2\sqrt{2}$ (取正)

故 $L_{AB}：x-y+2\sqrt{2}=0$。

故選(1)(2)(4)。

12. 答案 **345**

解析



(1)(2)(3)

M 在 L_1 上，

假設 $M(t,23-4t)$，t 為實數

⇒ 並由 M 是 B , C 中點可得

$C(2t-1,44-8t)$，

且 C 在 L_2 上，代入得

$7(2t-1)+6(44-8t)-53=0$ ⇒ $t=6$

∴ $M(6,-1)$ ⇒ $C(11,-4)$

又 L_1 , L_2 之交點為重心 $G(5,3)$

⇒ $A(3,11)$。

(4) 由 $A(3,11)$, $C(11,-4)$

⇒ $m=\dfrac{-15}{8}$ ⇒ $15x+8y-133=0$。

(5) $\overline{AC}=\sqrt{8^2+(-15)^2}=17$，

$d(B,L_{AC})=\dfrac{|15\times1+8\times2-133|}{\sqrt{15^2+8^2}}=\dfrac{102}{17}$

⇒ $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times17\times\dfrac{102}{17}=51$。

故選(3)(4)(5)。

第貳部分：選填題

A. 答案 **23**

解析 $f(1)=4$，$f(2)=7$，$f(3)=m$，

若 $f(x)$ 為一次函數，

則 $(1,4)$, $(2,7)$, $(3,m)$ 三點共線，

故 $m=10$

∴ $f(4)=n=13$

所求 $=m+n=23$。

B. 答案 **210**

解析 設休息天數為 x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5

x_1　　x_2　　x_3　　x_4　　x_5

□ 比賽 □ 比賽 □ 比賽 □ 比賽 □

⇒ $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=26$，

且 x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , $x_5\geq4$，

令 $x_1=x_1'+4$，$x_2=x_2'+4$，$x_3=x_3'+4$，

$x_4=x_4'+4$，$x_5=x_5'+4$

∴ $(x_1'+4)+(x_2'+4)+(x_3'+4)+$

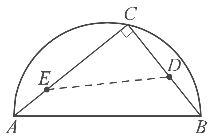
$(x_4'+4)+(x_5'+4)=26$

⇒ $x_1'+x_2'+x_3'+x_4'+x_5'=6$

⇒ $H^5_6=C^{10}_6=210$。

C. 答案 $\dfrac{20}{7}$

解析 設 $\overline{AC}=b$，$\overline{BC}=a$



∵ $\overline{AB}$ 為直徑

∴ $\angle C=90°$

⇒ $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times a\times b=5$

∴ $ab=10$，又 $\overline{AE}:\overline{EC}=2:5$

⇒ $\overline{CE}=\dfrac{5}{7}b$，$\overline{BD}:\overline{DC}=3:4$

⇒ $\overline{CD}=\dfrac{4}{7}a$

故 $\overline{DE}=\sqrt{(\dfrac{4}{7}a)^2+(\dfrac{5}{7}b)^2}=\dfrac{1}{7}\sqrt{16a^2+25b^2}$

由算幾不等式得

$\dfrac{16a^2+25b^2}{2}\geq\sqrt{16a^2\cdot25b^2}=20ab=200$

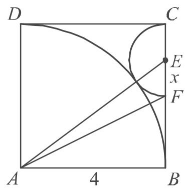
⇒ $16a^2+25b^2\geq400$，

故 $\overline{DE}=\dfrac{1}{7}\sqrt{16a^2+25b^2}\geq\dfrac{1}{7}\sqrt{400}=\dfrac{20}{7}$，

所以 $\overline{DE}$ 之最小值為 $\dfrac{20}{7}$。

D. 答案 $\dfrac{2}{11}$

解析 令 $\overline{EF}=x$



⇒ $\overline{AE}=4+x$，

$\overline{BE}=4-x$，

$\triangle ABE$ 中

⇒ $(4+x)^2=4^2+(4-x)^2$

⇒ $16+8x+x^2=16+16-8x+x^2$

⇒ $16x=16$ ⇒ $x=1$

∴ $\tan\angle EAB=\dfrac{3}{4}$，$\tan\angle FAB=\dfrac{1}{2}$

⇒ $\tan(\angle EAF)=\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{11}$。

E. 答案 **-1**

解析 即滿足 $AB=BA$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

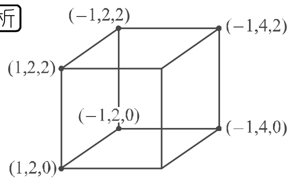
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3a+4b & a+2b \\ 11 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3a+5 & 3b-1 \\ 4a+10 & 4b-2 \end{bmatrix}$$

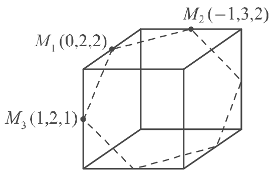
$$\therefore \begin{cases} 3a+4b=3a+5 \\ a+2b=3b-1 \end{cases} \Rightarrow b=\frac{5}{4}\text{，}a=\frac{1}{4}$$

故 $a-b=-1$

F. 答案 **$x+y+z=4$**

解析





$\overrightarrow{M_1M_3}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,1,0)$，

$\overrightarrow{M_1M_3}\times\overrightarrow{M_1M_2}=(1,1,1)\Rightarrow x+y+z=k$，

代入點 $M_1\Rightarrow x+y+z=4$。

G. 答案 **$4-3\sqrt{3}$**

解析 令 $\angle BCA=\theta$，$\angle ACD=3\theta$，

由正弦定理

$$\Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\sin 3\theta}=\frac{\overline{AB}}{\sin\theta} \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{3\sin\theta-4\sin^3\theta}=\frac{\overline{AB}}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3-4\sin^2\theta}=\frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow 2=3-4\sin^2\theta \Rightarrow \sin^2\theta=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow \theta=30^\circ \quad \therefore \angle ACD=90^\circ$$

$$\Rightarrow \overline{AD}=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{100}=10 \quad \therefore \overline{AB}=5$$

在 $\triangle ABC$ 中，$\cos 30^\circ=\dfrac{6^2+\overline{BC}^2-5^2}{2\cdot\overline{BC}\cdot 6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

令 $\overline{BC}=k\Rightarrow k^2-6\sqrt{3}\,k+11=0$

$\Rightarrow k=\dfrac{6\sqrt{3}\pm\sqrt{64}}{2}=4\pm 3\sqrt{3}$（取負），

故 $\overline{BC}=4-3\sqrt{3}$。

H. 答案 **32**

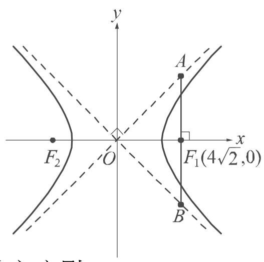
解析 $x^2-y^2=16$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{16}=1$

為等軸雙曲線

$\Rightarrow$ 兩漸近線互相垂直，

且 $a=b=4$，$c=4\sqrt{2}$，



令 A, B 為 L_1 與兩漸近線之交點

$\Rightarrow \overline{AB}=2\overline{AF_1}=2\overline{OF_1}=8\sqrt{2}$，

故所求面積 $=\dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 8\sqrt{2}=32$。