康熹文化

102 年學科能力測驗模擬試卷

數學考科解答卷

答　案

一、單一選擇題：

1. (1)　2. (1)　3. (5)　4. (4)　5. (3)　6. (4)　7. (4)

二、多重選擇題：

8. (1)(4)(5)　9. (1)(2)　10. (1)(2)(5)　11. (1)(2)(3)(4)　12. (2)(3)(4)　13. (1)(3)(4)(5)

三、選填題：

A. -745　B. $\frac{75}{11}$　C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　D. 6　E. 2　F. $(\frac{23}{10}, \frac{11}{10})$　G. 5

解　析

一、單一選擇題：

1. $f(x)=\frac{x^0}{0!}+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}$

$\Rightarrow f(2)=\frac{1}{1}+\frac{2}{1}+\frac{4}{2}+\frac{8}{6}+\frac{16}{24}+\frac{32}{120}=1+2+2+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{15}=7+\frac{4}{15}$,

又 $\frac{26}{\sqrt{19-8\sqrt{3}}}=\frac{26}{\sqrt{19-2\sqrt{16\times 3}}}=\frac{26}{4-\sqrt{3}}=2(4+\sqrt{3})\approx 11.5$,

∴介於兩者之間的整數共有 8，9，10，11 四個．

2. 將 4 組視為 甲 、 乙 、 丙 、 □ ,

將甲、乙、丙之外的其他 4 人，任意排入這 4 個位置，

共有 4^4 種，但扣掉第四組 □ 沒有人排入，方法 3^4 種，所以共有 $4^4-3^4=175$ 種．

3. (1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=\frac{9}{2}$ ．

(2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2=8$ ．

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2)=\frac{9+16-36}{2}=-\frac{11}{2}$ ．

(4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}(\overline{BA}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2)=-\frac{29}{2}$.

(5)設 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=x|\overrightarrow{AB}|^2+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y|\overrightarrow{AC}|^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9x-\frac{11}{2}y=\frac{9}{2}\\-\frac{11}{2}x+16y=8\end{cases}$,

將 $x=\frac{1}{6}$， $y=\frac{2}{9}$ 代入，不合 .

故(5)不正確 .

4. $y=f(x)=a^x$ 與 $y=g(x)=\log_a x$，無論 $a>1$ 時或 $0<a<1$ 時，兩圖形均對稱 $y=x$ 直線 .
而且 $1<a<2$ 時，兩者會相切於 $y=x$，甚至與 $y=x$ 直線相交二點，故(4)不合 .

5. (1) $3(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+4=0\Rightarrow3\cos3\theta=-4\Rightarrow\cos3\theta=-\frac{4}{3}$ 不合 .

(2) $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$ 不可能同時值為 1，所以 $2\sin\theta+3\cos\theta\neq5$.

(3) $\tan\theta$ 之值範圍可為任意實數，且此方程式判別式 >0，所以正確 .

(4) $\log_{\frac{1}{3}}(\sin^2\theta+1)>0$ 表 $0<\sin^2\theta+1<1$，顯然不合 .

(5)邊長為正整數，只能確定三角形各內角的餘弦值為有理數，正弦值就不一定為有理數，
外接圓半徑也一樣不一定為有理數 .

6. 本利和 $=10000(1.002^{24}+1.002^{23}+\cdots+1.002)$

$$=10000\times\frac{1.002[1.002^{24}-1]}{1.002-1}=10000\times\frac{1.002\times0.0487}{0.002}=243987$$ ，故選(4) .

因為 $\log(1.002)^{24}=24\times0.00086=0.02064$.

利用內插法

x	$\log x$
1.04	0.0170
x	0.02064
1.05	0.0212

（Δ：1.04 至 x；0.01：1.04 至 1.05；0.00364：0.0170 至 0.02064；0.00420：0.0170 至 0.0212）

$\Rightarrow\frac{\Delta}{0.01}=\frac{0.00364}{0.00420}\Rightarrow\Delta=0.0087$， $\therefore x=1.04+0.0087=1.0487\Rightarrow(1.002)^{24}=1.0487$.

7. 設事件 A：2 球均同色，事件 B：2 球均白色 .

所求為 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{8}\times\frac{2}{8}}{\frac{5}{8}\times\frac{6}{8}+\frac{3}{8}\times\frac{2}{8}}=\frac{1}{6}$，故選(4) .

二、多重選擇題：

8. (1)依題意知 $(1,\ f(1))$，$(2,\ f(2))$，$(-1,\ f(-1))$ 三點不共線，所以通過此三點的多項式最低次式為二次式．

(2)依 *Lagrange*：$f(x)=2\times\dfrac{(x-2)(x+1)}{(1-2)(1+1)}+8\times\dfrac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)}+5\times\dfrac{(x-1)(x+1)}{(2-1)(2+1)}$，故不合．

(3) $f(x)$ 不一定為二次式，$f(x)=(x-1)(x-2)(x+1)Q(x)+R(x)$，

而 $R(x)=a(x-1)(x-2)+b(x-1)+2$，所以 $f(3)$ 值不確定．

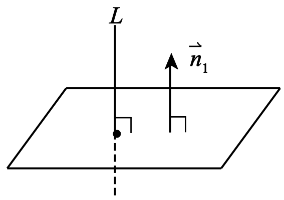
(4)由(3)代入 $f(2)=5\Rightarrow b=3$，$f(-1)=8\Rightarrow a=2$，$\therefore R(x)=2(x-1)(x-2)+3(x-1)+2$．

(5) $f(x)=(x-1)(x-2)(x+1)+2(x-1)(x-2)+3(x-1)+2=x^3-4x+5$，

所以 $f(i)=i^3-4i+5=-i-4i+5=5-5i$．

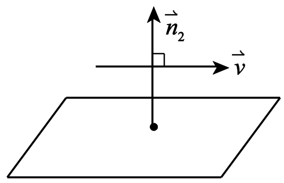
故選(1)(4)(5)．

9. 直線 L 的方向向量為 $\overrightarrow{v}=(1,\ -2,\ 3)$．



(1)平面 $x-2y+3z=0$ 之法向量 $\overrightarrow{n_1}=(1,\ -2,\ 3)\,//\,\overrightarrow{v}$

$\Rightarrow$表示 L 與平面垂直，所以必有交點．



(2)平面 $5x+y-z=10$，法向量 $\overrightarrow{n_2}=(5,\ 1,\ -1)$，

$\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{v}=(5,\ 1,\ -1)\cdot(1,\ -2,\ 3)=5-2-3=0\Rightarrow\overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{v}$．

所以平面與 L 平行．又將 L 上一點 $P(1,\ 2,\ -3)$代入平面

$5\cdot1+2-(-3)=10$表示點 P 也在平面上，所以平面與 L 重合．

(3) $L_1:\begin{cases}x=-t-1\\ y=2t+4\\ z=-3t-6\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$的方向向量 $\overrightarrow{v_1}=(-1,\ 2,\ -3)\,//\,\overrightarrow{v}$，表示 $L_1//L$，

但 L_1上的點 $(-1,\ 4,\ -6)\notin L$，所以兩者平行無交點．

(4)設交點 $(1+t,\ 2-2t,\ -3+3t)$分別代入

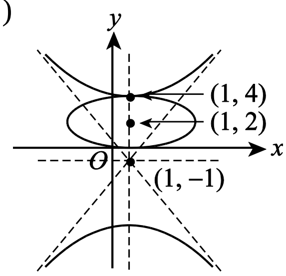
$L_2:\begin{cases}x+2y+3z=4\\ x-y+2z=13\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+t+4-4t-9+9t=4\Rightarrow 6t=8\\ 1+t-2+2t-6+6t=13\Rightarrow 9t=20\end{cases}$不合，故無交點．

(5)設交點 $(1+t,\ 2-2t,\ -3+3t)$代入

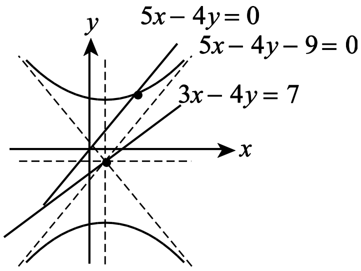
$L_3:\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}\Rightarrow\dfrac{1+t}{3}=\dfrac{2-2t}{-1}=\dfrac{-3+3t+1}{2}\Rightarrow\begin{cases}-1-t=6-6t\\ 4-4t=3-3t-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=\dfrac{7}{5}\\ t=2\end{cases}$不合．

故選(1)(2)．

10. (1) 一交點．



(2)(3) $5x-4y=0$ 平行漸近線有一交點，$3x-4y=7$ 斜率小於其中之一漸近線，無交點．



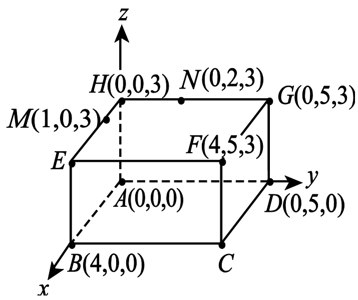
(4)新二次曲線為 $\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{16}=1$，由圖形觀察與 Γ 無交點．

(5) Γ 的二條漸近線為 $4(y+1)\pm 5(x-1)=0 \Rightarrow 5x+4y-1=0$ 與 $5x-4y-9=0$，

而 $\dfrac{|5a+4b-1|}{\sqrt{5^2+4^2}}\times\dfrac{|5a-4b-9|}{\sqrt{5^2+(-4)^2}}=\dfrac{25\times 16}{25+16}\Rightarrow |(5a+4b-1)(5a-4b-9)|=400$．

故選(1)(2)(5)．

11. (1) $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BE}$．



(2) $(\overrightarrow{HF}\times\overrightarrow{EG})\perp$ 平面 $ABCD \Rightarrow (\overrightarrow{HF}\times\overrightarrow{EG})\cdot\overrightarrow{BD}=0$．

(3) P 為△HFD 之重心，$\overrightarrow{AP}=(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{10}{3},\ 2)$，

又 $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AH}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}(0,\ 0,\ 3)+\dfrac{1}{3}(4,\ 0,\ 0)+\dfrac{2}{3}(0,\ 5,\ 0)$

$=(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{10}{3},\ 2)\Rightarrow \overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AH}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$．

(4) $\overrightarrow{AM}=(1,\ 0,\ 3)$，$\overrightarrow{AN}=(0,\ 2,\ 3)$，$\therefore \cos\angle MAN=\dfrac{9}{\sqrt{10}\sqrt{13}}=\dfrac{9}{\sqrt{130}}$．

(5)平面 BDH 依截距式，其方程式為 $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{5}+\dfrac{z}{3}=1\Rightarrow 15x+12y+20z=60$

$\Rightarrow d(F,\ BDH\text{平面})=\dfrac{|60+60+60-60|}{\sqrt{15^2+12^2+20^2}}=\dfrac{120}{\sqrt{769}}$（不合）．

故選(1)(2)(3)(4)．

12. (1) $y_i = x_i^2 \Rightarrow \sigma_Y \neq \sigma_X^{\ 2}$.

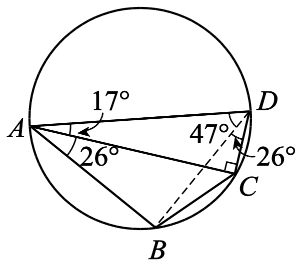
(2) $\because z_i = \dfrac{x_i - \mu_X}{\sigma_X} = \dfrac{1}{\sigma_X} x_i - \dfrac{\mu_X}{\sigma_X} \Rightarrow \sigma_Z = (\dfrac{1}{\sigma_X})(\sigma_X) = 1$.

(3) $r(ax+b,\ cy+d) = \pm r(x,\ y)$， $ac > 0$ 取＋， $ac < 0$ 取－， $\therefore r_1 = 1$， $r_2 = -1 \Rightarrow r_1 = -r_2$.

(4)拿掉的值為平均數，所剩的數之平均數，標準差不變，∴相關係數不變 .

(5) D 對 A： $y = -\dfrac{1}{3}x + 2$， C 對 A： $y = 3x - 1$，故 $a \neq b$.

13. 由圖知 $\angle BDC = 26°$（對圓弧 BC ），



由△ACD 中 $\dfrac{\overline{AC}}{\sin 73°} = 2R = 2 \Rightarrow \overline{AC} = 2\sin 73°$.

與△ABD 中 $\dfrac{\overline{BD}}{\sin 43°} = 2R = 2 \Rightarrow \overline{BD} = 2\sin 43°$.

又 $\begin{cases} \triangle ACD \text{ 中，} \dfrac{\overline{CD}}{\sin 17°} = 2R \Rightarrow \overline{CD} = 2\sin 17° \\ \triangle ABD \text{ 中，} \dfrac{\overline{AB}}{\sin 47°} = 2R \Rightarrow \overline{AB} = 2\sin 47° \end{cases}$，

$\therefore \overline{AC} \times \overline{BD} + \overline{CD} \times \overline{AB} = (2\sin 73°)(2\sin 43°) + (2\sin 17°)(2\sin 47°)$

$= 4(\sin 73° \sin 43° + \sin 17° \sin 47°) = 4(\cos 17° \cos 47° + \sin 17° \sin 47°)$

$= 4\cos(47° - 17°) = 4\cos 30° = 4 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

三、選填題：

A. (1) $1\times 15 + 2\times 14 + 3\times 13 + \cdots + 10\times 6 = \sum_{k=1}^{10} k(16-k) = 16\sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} k^2$

$= 16 \times \dfrac{10\times 11}{2} - \dfrac{10\times 11\times 21}{6} = 880 - 385 = 495$.

(2) $1^2 + 2^2 + \cdots + 15^2 = \dfrac{15\times 16\times 31}{6} = 1240$， $\therefore 495 = 1240 + a \Rightarrow a = 495 - 1240 = -74$.

B. $\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -11 \\ -11 & 26 \end{bmatrix}$，

滿足 $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \Rightarrow AB = BA \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -11 \\ -11 & 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -11 \\ -11 & 26 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow k = \dfrac{75}{11}$.

C. $\overrightarrow{AI}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{2+4+3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{2+4+3}\overrightarrow{AC}$.

$$|\overrightarrow{AI}|^2=|\frac{3}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AC}|^2=\frac{9}{81}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{4}{81}|\overrightarrow{AC}|^2+\frac{12}{81}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{9}{81}\times4+\frac{4}{81}\times9+\frac{12}{81}\times\frac{1}{2}(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2)$$

$$=\frac{36}{81}+\frac{36}{81}+\frac{6}{81}(4+9-16)=\frac{54}{81}=\frac{2}{3}$$.

$\therefore|\overrightarrow{AI}|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

D. $\dfrac{ax+1}{-x^2+2x-3}\le1\Rightarrow\dfrac{ax+1}{-(x^2-2x+3)}\le1$.

但 $x^2-2x+3>0$ 對任意實數 x 而言恆成立 $\Rightarrow -(x^2-2x+3)<0$ 恆成立 .

$\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow ax+1\ge-(x^2-2x+3)$ 恆成立 $\Rightarrow x^2-2x+3+ax+1\ge0$ 恆成立

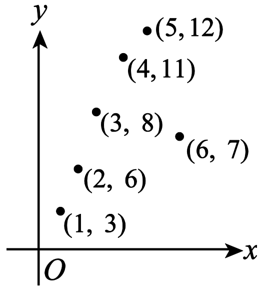
$\Rightarrow x^2+(a-2)x+4\ge0$ 恆成立 $\Rightarrow(a-2)^2-16\le0\Rightarrow-4\le a-2\le4\Rightarrow-2\le a\le6$,

所以 a 最大值為 6 .

E.

b \ a ($\frac{b}{a}$)	1	2	3	4	5	6
2	(2)	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$
4	4	(2)	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$
6	6	3	(2)	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$	1
8	8	4	$\frac{8}{3}$	(2)	$\frac{8}{5}$	$\frac{4}{3}$

F. 由圖可知去掉 (6, 7)所剩的 5 組資料相關係數最大

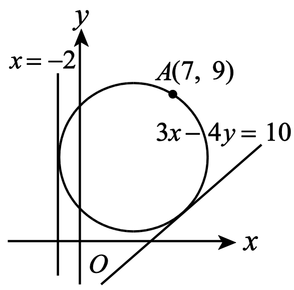


x_i	4	1	5	3	2	總和
y_i	11	3	12	8	6	
x_iy_i	44	3	60	24	12	143
x_i^2	16	1	25	9	4	55

$\mu_x=3$, $\mu_y=8$, $\dfrac{\Sigma x_iy_i-n\mu_x\mu_y}{\Sigma x_i^2-n\mu_x^2}=\dfrac{143-5\times3\times8}{55-5\times9}=\dfrac{23}{10}$.

$\therefore$ 迴歸直線為 $y-8=\dfrac{23}{10}(x-3)\Rightarrow y=\dfrac{23}{10}x+\dfrac{11}{10}$.

G. 設切圓圓心 $(x,\ y)$，半徑為 r .



$r=|x+2|=\dfrac{|3x-4y-10|}{5}=\sqrt{(x-7)^2+(y-9)^2}$,

$x+2=-\dfrac{3x-4y-10}{5}=\sqrt{(x-7)^2+(y-9)^2}$.

① $x+2=-\dfrac{3x-4y-10}{5}\Rightarrow 5x+10=-3x+4y+10$

$\Rightarrow 8x=4y\Rightarrow y=2x$.

② $(x+2)^2=(x-7)^2+(2x-9)^2$ ， $x^2+4x+4=x^2-14x+49+4x^2-36x+81$

$\Rightarrow 4x^2-54x+126=0\Rightarrow 2x^2-27x+63=0\Rightarrow x=3,\ \dfrac{21}{2}\Rightarrow$ 最小半徑 $r=2+3=5$.