康熹文化

104 學年度學科能力測驗模擬試卷

數學考科解答卷

答　案

第壹部分：選擇題

一、單選題：

1. (2)　2. (1)　3. (4)　4. (4)　5. (5)　6. (2)　7. (4)

二、多選題：

8. (1)(3)(4)　9. (1)(3)　10. (4)(5)　11. (3)(4)(5)　12. (1)(3)(4)(5)　13. (3)(5)

第貳部分：選填題

A. $\begin{bmatrix} 29 & 32 \\ 16 & 29 \end{bmatrix}$　B. $\dfrac{13}{32}$　C. 11　D. (330, 55)　E. −1　F. 136000　G. $(\dfrac{1}{2}, 36, 36)$

解　析

第壹部分：選擇題

一、單選題：

1.　$k^2 = (\sqrt{9+2\sqrt{14}})^2 + (\sqrt{9-2\sqrt{14}})^2 + 2\sqrt{(9+2\sqrt{14})(9-2\sqrt{14})}$

$= 9+2\sqrt{14}+9-2\sqrt{14}+2\sqrt{81-56} = 18+2\sqrt{25} = 28$

$\Rightarrow k = \sqrt{28} \approx 5.3$.

(2) $5<k<6$. (3) $k>5$，$k^2-3k+10>0$. (4) $|k-3|<1$.

(5) $k^2(k-5)+5(k-5)>0$.

故選(2) .

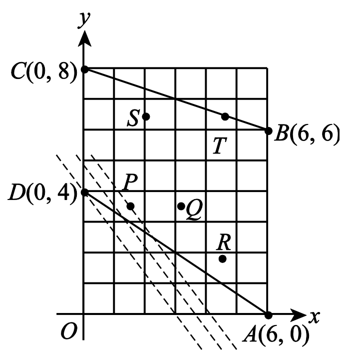
2.　$f(x, y) = 4x+3y+5$，斜率為 $-\dfrac{4}{3}$，

以此斜率上移，P 點是最早碰到的點，

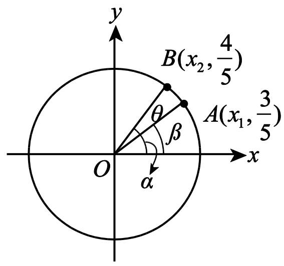
以 P, Q, R, S, T 五點而言，

P 點處會產生最小值 .

故選(1) .



3. 令 $\overline{OB}$， $\overline{OA}$ 與 x 軸正向的夾角分別為 α， β，



$\cos(\theta-180°)=\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$
$=-\cos(\alpha-\beta)=-(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$，
由圖知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{3}{5}$， $\sin\beta=\frac{3}{5}\Rightarrow\cos\beta=\frac{4}{5}$，
$\therefore\cos(\theta-180°)=-(\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{5})=-\frac{24}{25}$，故選(4)．

4. ①設 $f(x)=ax^2+bx+c$， $a,b,c\in\mathbb{R}$， $a\neq 0$，

若 $f(x)=0$ 二根和與二根積相等 $\Rightarrow -\frac{b}{a}=\frac{c}{a}\Rightarrow -b=c$ ．

②又 $f(x)>0$ 要恆成立 $\Rightarrow b^2-4ac<0$ 且 $a>0$ ．

③(1)×； $f(x)=x^2-4x+4\Rightarrow(-4)^2-4\times4=0$ ．

(2)×； $f(x)=2x^2+4x-4\Rightarrow 16-4(2)(-4)>0$ ．

(3)×； $f(x)=2x^2+4x-4$，同(2)．

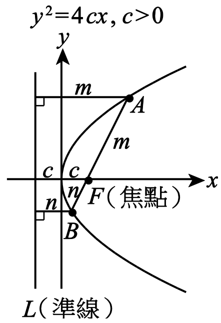
(4)○； $f(x)=2x^2-5x+5\Rightarrow 25-4\times2\times5<0$ ．

(5)×； $f(x)=-x^2+5x-5$， $a<0$ ．

故選(4)．

5. ①由圖知 r_1， r_3 都對稱 $\Rightarrow r_1=r_3=0$ ．②而 $r_2=0$（水平）， r_4 偏右上 $\Rightarrow r_4>0$ ．
③ r_5 偏左上 $\Rightarrow r_5<0$ ．故選(5)．

6. 根據定義知：



$d(A,L)=\overline{AF}=m$， $d(B,L)=\overline{BF}=n$， $d(F,L)=2c$

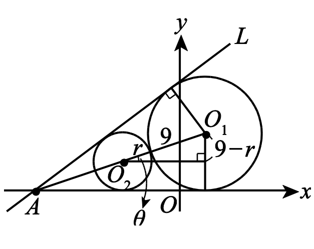
$\Rightarrow 2c=\frac{mn}{m+n}+\frac{mn}{m+n}=\frac{2mn}{m+n}\Rightarrow 4c=\frac{4mn}{m+n}=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow m+n=16mn\Rightarrow\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=16$ ．

根據柯西不等式： $[(\sqrt{m})^2+(2\sqrt{n})^2][(\frac{1}{\sqrt{m}})^2+(\frac{1}{\sqrt{n}})^2]\geq(1+2)^2$

$\Rightarrow(m+4n)(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})\geq 9\Rightarrow m+4n\geq\frac{9}{16}$ ．

7. ① $C_1:(x-4)^2+(y-9)^2=81$，



圓心 $O_1(4,9)$，半徑 $r_1=9$，表 C_1 與 x 軸相切．
② L 與圓 C_1 相切 $\Rightarrow d(O_1,L)=r_1$
$\Rightarrow\frac{|3\times4-4\times9+k|}{5}=9$

$\Rightarrow |k-24| = 45 \Rightarrow k = 69$， -21（不合）.

③ $L: 3x-4y+69=0$ 表 L 與 x 軸交 $A(-23, 0)$，

直線 $\overline{AO_1}$ 斜率 $= \dfrac{9-0}{4-(-23)} = \dfrac{9}{27} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \overleftrightarrow{AO_1}: y = \dfrac{1}{3}(x+23) \Rightarrow x-3y+23=0$.

④若 L 與 C_1 相切於點 (a,b)，

因為 (a,b) 在通過 $O_1(4,9)$ 且垂直 L 的直線上 $\Rightarrow 4a+3b=43$，

或根據點 (a,b) 與圓 C_1 所得的切線為

$ax+by-4(x+a)-9(y+b)+16=0$

$\Rightarrow (a-4)x+(b-9)y+(16-4a-9b)=0$，

此式同 $3x-4y+69=0$

$$\Rightarrow \frac{a-4}{3}=\frac{b-9}{-4}=\frac{16-4a-9b}{69}$$

$\Rightarrow 4a \quad 1+\ 6\ b=3 \quad -2\ 7a \Rightarrow \ \ell$.

⑤由圖知 $\dfrac{9-r}{9+r}=\sin\theta<\tan\theta=\dfrac{1}{3}=\dfrac{9}{27}<\dfrac{9}{17}$.

故只有(4)錯誤．

二、多選題：

8. ①任意取二張方法 C_2^n ．

②數字不連續 $\uparrow\overbrace{\bigcirc\uparrow\bigcirc\uparrow\bigcirc\uparrow\cdots\cdots\uparrow\bigcirc}^{n-2\text{個}}\uparrow$

$n-1$個空隙放入2數方法C_2^{n-1}

③數字連續 $\underline{1\ \ 2}\ \ \underline{3}\ \ \underline{4}\cdots\cdots n \Rightarrow$ 有 $n-2+1=n-1$ 組．

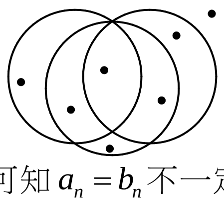
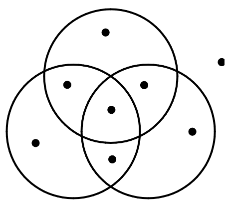
④第二次比第一次大 $\Rightarrow$

第一次取得	第二次方法	
1	$n-1$	共 $1+2+\cdots+(n-1)$
2	$n-2$	$=\dfrac{n(n-1)}{2}=C_2^n$
$\vdots$	$\vdots$	
$n-1$	1	

⑤第二次數字不小於第一次 $\Rightarrow$

第一次取得	第二次方法	
1	n	共 $1+2+\cdots+n$
2	$n-1$	$=\dfrac{n(n+1)}{2}\neq P_2^n$
$\vdots$	$\vdots$	
n	1	

9. (1) $a_1=b_1=2$ 且 $a_2=b_2=4$ ．

(2) $b_3=7$ ，但 $a_3=8$ 

(3)由(2)可知 $a_n=b_n$ 不一定成立．

(4)由 $a_1=2$， $a_2=4=a_1+2$， $a_3=8=a_2+4$，

$a_4=14=a_3+6\cdots\Rightarrow a_n=a_{n-1}+2(n-1)$，

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad \cancel{a_1}&=2\\
\cancel{a_2}&=\cancel{a_1}+2\times 1\\
\cancel{a_3}&=\cancel{a_2}+2\times 2\\
&\ \vdots\\
+)\ a_n&=\cancel{a_{n-1}}+2(n-1)\\
\hline
a_n&=2+2+(1+\cdots+n-1)\\
&=2+2\times\frac{n(n-1)}{2}=n^2-n+2
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow a_{12}=144-12+2=134$.

(5) $b_1=2$， $b_2=4=b_1+2$， $b_3=7=b_2+3$， $b_4=11=b_3+4$

$\Rightarrow\cdots\Rightarrow b_n=b_{n-1}+n$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\quad \cancel{b_1}&=2\\
\cancel{b_2}&=\cancel{b_1}+2\\
\cancel{b_3}&=\cancel{b_2}+3\\
&\ \vdots\\
+)\ b_n&=\cancel{b_{n-1}}+n\\
\hline
b_n&=2+2+3+\cdots+n=1+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+2}{2}
\end{aligned}
$$

故選(1)(3) .

10. (1) $\dfrac{\sin 40^\circ}{1}<\dfrac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ}\Rightarrow \sin 40^\circ<\tan 40^\circ$.

(2) $(2\sin 40^\circ\cos 40^\circ)\cos 80^\circ=\sin 80^\circ\cos 80^\circ=\dfrac{1}{2}\sin 160^\circ=\dfrac{1}{2}\sin 20^\circ$，

$\dfrac{\tan 40^\circ}{1-\tan^2 40^\circ}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{2\tan 40^\circ}{1-\tan^2 40^\circ})=\dfrac{1}{2}\tan 80^\circ>\dfrac{1}{2}\sin 80^\circ>\dfrac{1}{2}\sin 20^\circ$.

(3) $\sin 80^\circ=\cos 10^\circ=\cos(40^\circ-30^\circ)=\cos 40^\circ\cos 30^\circ+\sin 40^\circ\sin 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 40^\circ+\dfrac{1}{2}\sin 40^\circ$.

(4) $\tan 40^\circ-4\sin 40^\circ<\tan 45^\circ-4\sin 30^\circ=1-4\times\dfrac{1}{2}=-1$.

(5)由(3)知 $\dfrac{\sin 40^\circ-2\cos 10^\circ}{\cos 40^\circ}=\dfrac{\sin 40^\circ-2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40^\circ+\frac{1}{2}\sin 40^\circ)}{\cos 40^\circ}$

$=\dfrac{\sin 40^\circ-\sqrt{3}\cos 40^\circ-\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ}=\dfrac{-\sqrt{3}\cos 40^\circ}{\cos 40^\circ}=-\sqrt{3}$.

故選(4)(5) .

11. ① z 軸： $x=0$， $y=0$， $z=t$， $t\in\mathbb{R}$，與 L 不平行，

代入 $L\Rightarrow\dfrac{0-2}{3}=\dfrac{0+5}{-4}$ 顯然不成立 $\Rightarrow$ 與 L 歪斜．

②將 $L: x=3t+2$， $y=-4t-5$， $z=1$ 代入．

平面 $4x+3y+5z+6=0\Rightarrow 4(3t+2)+3(-4t-5)+5+6=0$

$\Rightarrow 4=0$ 顯然不成立 $\Rightarrow$ 表 L 與此平面平行不相交．

③ $L:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+5}{-4}$， $z=1\Rightarrow 4x+3y+7=0$， $z-1=0$，

所以平面 $4x+3y+7+k(z-1)=0$ 是表示含 L 的平面．

④直線： $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+5}{3}=\dfrac{z-1}{-4}$，

表示此直線與 L 有共同交點 $(2,-5,1)$，所以此線與 L 共平面．

⑤直線： $\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y+5}{4}$， $z=-1$ 之方向向量為 $(-3,4,0)$，

而 L 的方向向量為 $(3,-4,0)=-(-3,4,0)$，

表示此線與直線 L 互相平行，所以會共平面．

故選(3)(4)(5)．

12. ① $\overrightarrow{AE}=\dfrac{m}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AC}$，若 B,E,C 共線， $\dfrac{m}{5}+\dfrac{4}{5}=1\Rightarrow m=1$，

且表示 $\overline{BE}:\overline{EC}=4:1$．

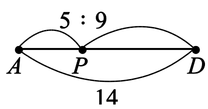
② $\overrightarrow{AD}=\dfrac{8}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{6}{5}\overrightarrow{AC}$，又 $\overrightarrow{AP}=t\,\overrightarrow{AD}$， $t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AP}=\dfrac{8}{5}t\,\overrightarrow{AB}+\dfrac{6}{5}t\,\overrightarrow{AC}$，但 B,P,C 共線 $\Rightarrow\dfrac{8}{5}t+\dfrac{6}{5}t=1\Rightarrow t=\dfrac{5}{14}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AP}=\dfrac{8}{5}\times\dfrac{5}{14}\overrightarrow{AB}+\dfrac{6}{5}\times\dfrac{5}{14}\overrightarrow{AC}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AC}$

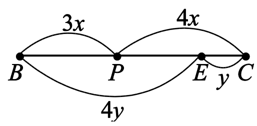
$\Rightarrow|\overrightarrow{AP}|^2=\dfrac{16}{49}|\overrightarrow{AB}|^2+\dfrac{9}{49}|\overrightarrow{AC}|^2+\dfrac{24}{49}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{16}{49}a^2+\dfrac{9}{49}b^2+\dfrac{24}{49}ab\cos 60^\circ$

$=\dfrac{16}{49}a^2+\dfrac{9}{49}b^2+\dfrac{12}{49}ab$．

③由②，知 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{5}{14}\overrightarrow{AD}\Rightarrow$ 

$\Rightarrow\overline{AP}:\overline{PD}=5:9$．

④由②， $\overrightarrow{AP}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AC}$，知 $\overline{BP}:\overline{PC}=3:4$



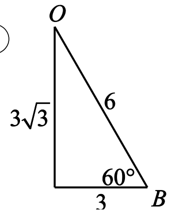
$\Rightarrow 7x=5y\Rightarrow y=\dfrac{7}{5}x\Rightarrow\overline{BP}:\overline{PE}:\overline{EC}=3x:(4y-3x):y=3x:\dfrac{13}{5}x:\dfrac{7}{5}x=15:13:7$

$=\triangle ABP$ 面積： $\triangle APE$ 面積： $\triangle AEC$ 面積．

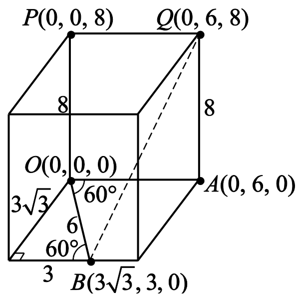
⑤ $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=(\frac{8}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{6}{5}\overrightarrow{AC})\cdot(\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AC})=\frac{8}{25}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{24}{25}|\overrightarrow{AC}|^2+\frac{38}{25}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

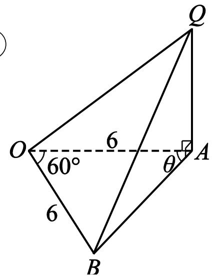
$$=\frac{8}{25}a^2+\frac{24}{25}b^2+\frac{38}{25}\cdot a\cdot b\cos 60^\circ=\frac{1}{25}(8a^2+19ab+24b^2)\ .$$

故選(1)(3)(4)(5)．

13. ① 

由圖知 $B(3\sqrt{3},3,0)$ ．



② 

平面 ABQ 與平面 OAQ 夾角為 θ，

$\cos\theta=\pm\cos 60^\circ=\pm\frac{1}{2}$ ．（∵ △OAB 為正△）

③ $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{BQ}=(3\sqrt{3},3,-8)\cdot(-3\sqrt{3},3,8)=-27+9-64=-82$ ．

④設平面 AQB 法向量 $\overrightarrow{n}=(\alpha,\beta,\gamma)$，

$$\begin{cases}\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{AQ}=(0,0,8)\\ \overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{AB}=(3\sqrt{3},-3,0)\end{cases}\Rightarrow \alpha:\beta:\gamma=\begin{vmatrix}0&8\\-3&0\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}8&0\\0&3\sqrt{3}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}0&0\\3\sqrt{3}&-3\end{vmatrix}$$

$=24:24\sqrt{3}:0=1:\sqrt{3}:0$，取 $\overrightarrow{n}=(1,\sqrt{3},0)$

$\Rightarrow$ 平面 ABQ 為 $x+\sqrt{3}y=k$，代 $A(0,6,0)\Rightarrow k=6\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ 所以平面 ABQ 方程式為 $x+\sqrt{3}y=6\sqrt{3}$ ．

⑤因為 $\overleftrightarrow{PO}$ 平行平面 ABQ，

所以 $d(\overleftrightarrow{PO}$, 平面 $ABQ)=d(O$, 平面 $ABQ)=\frac{|0+0-6\sqrt{3}|}{\sqrt{1+3}}=3\sqrt{3}$ ．

故選(3)(5)．

第貳部分：選填題

A. $A^2-AB-BA+B^2=(A^2-AB)-(BA-B^2)=A(A-B)-B(A-B)$

$$=(A-B)(A-B)=\begin{bmatrix}3&0\\-2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0\\-2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&0\\-4&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2+AB-BA+B^2=\begin{bmatrix}9&0\\-4&1\end{bmatrix}+2AB=\begin{bmatrix}9&0\\-4&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}20&32\\20&28\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}29&32\\16&29\end{bmatrix}.$$

B. 一局中 A 事件會發生的機率為

$$\underbrace{(\frac{1}{2})^5}_{\text{沒有正面}} + \underbrace{C_1^5(\frac{1}{2})^4(\frac{1}{2})}_{\substack{\text{一次正面}\\(\uparrow-\uparrow-\uparrow-\uparrow-\uparrow)}} + \underbrace{C_2^4(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^2}_{\substack{\text{二次正面}\\(\uparrow-\uparrow-\uparrow-\uparrow)}} + \underbrace{C_3^3(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^3}_{\substack{\text{三次正面}\\(\uparrow-\uparrow-\uparrow)}}$$

$$=\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{6}{32}+\frac{1}{32}=\frac{13}{32},$$

但各局之間互不影響，所以在第一局 A 事件發生的條件下，

第三局事件 A 會發生的機率，同第三局本身事件 A 發生的機率為 $\frac{13}{32}$.

C. $(x+y)^n+(x-y)^n$

$$=C_0^n x^n+C_1^n x^{n-1}y+C_2^n x^{n-2}y^2+\cdots+C_n^n y^n+C_0^n x^n-C_1^n x^{n-1}y+C_2^n x^{n-2}y^2+\cdots+(-1)^n C_n^n y^n$$

$$=2(C_0^n x^n+C_2^n x^{n-2}y^2+\cdots),$$

係數總和 $=2(C_0^n+C_2^n+C_4^n+\cdots)=2\cdot 2^{n-1}=2^n$，又 $2000<2^n<4000\Rightarrow n=11$.

D. $a_1=a$， $a_2=ar$， $a_3=ar^2$， $\cdots$， $a_n=ar^{n-1}$，

$$\frac{1}{\log_{a_1} r}+\frac{2}{\log_{a_2} r}+\frac{3}{\log_{a_3} r}+\cdots+\frac{10}{\log_{a_{10}} r}=\log_r a_1+2\log_r a_2+3\log_r a_3+\cdots+10\log_r a_{10}$$

$$=\log_r(a_1\times {a_2}^2\times\cdots\times {a_{10}}^{10})=\log_r(a\times(ar)^2\times(ar^2)^3\times\cdots\times(ar^9)^{10})$$

$$=\log_r(a^{1+2+\cdots+10}r^{1\times2+2\times3+\cdots+9\times10})=\log_r a^{55}+\frac{9\times10\times11}{3}\log_r r=330+55\log_r a,$$

故 $(k,m)=(330,55)$.

E. 依題意： $x^4-4x^3+ax^2+x+7=bx+a$

$\Rightarrow x^4-4x^3+ax^2+(1-b)x+(7-a)=0$ 有相異二重根

$\Rightarrow x^4-4x^3+ax^2+(1-b)x+(7-a)=(x-m)^2(x-n)^2=(x^2+Ax+B)^2$，

但 $(x^2+Ax+B)^2=x^4+2Ax^3+(A^2+2B)x^2+2ABx+B^2$，

$$\therefore \begin{cases} 2A=-4 \Rightarrow A=-2 \\ A^2+2B=a \Rightarrow 4+2B=a \\ 2AB=1-b \Rightarrow -4B=1-b \\ B^2=7-a \end{cases} \Rightarrow B^2=7-(4+2B) \Rightarrow B^2+2B-3=0 \Rightarrow B=-3 \text{ 或 } 1\text{（不合）},$$

故 $(x-m)^2(x-n)^2=(x^2-2x-3)^2=(x-3)^2(x+1)^2$，所以較小重根為 -1 .

F. $a_2+a_4+\cdots+a_{30}=2\times4^2+4\times6^2+\cdots+30\times32^2$

$$=\sum_{k=1}^{15}2k(2k+2)^2=8(\sum_{k=1}^{15}k^3+2\sum_{k=1}^{15}k^2+\sum_{k=1}^{15}k)=8[(\frac{15\times16}{2})^2+2(\frac{15\times16\times31}{6})+(\frac{15\times16}{2})]$$

$=8(14400+2480+120)=136000$.

G. ① $\sigma_X=4\sigma_Z$，但由 $y_i=\frac{1}{2}x_i+k$， $z_i=my_i+k$， $m>0$，

知 $\sigma_Y=\frac{1}{2}\sigma_X$ 且 $\sigma_Z=m\sigma_Y=\frac{1}{2}m\sigma_X=\frac{1}{2}m(4\sigma_Z)\Rightarrow\sigma_Z=2m\sigma_Z\Rightarrow m=\frac{1}{2}$.

② y_i 的中位數 $=\frac{1}{2}$（ x_i 的中位數） $+k\Rightarrow 56=\frac{1}{2}\times40+k\Rightarrow k=36$.

③ $y_i=\frac{1}{2}x_i+36$ 且 $z_i=\frac{1}{2}y_i+36\Rightarrow z_i=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x_i+36)+36=\frac{1}{4}x_i+54$.

④ $\mu_Z=\frac{7}{4}\mu_X$ 且 $\mu_Z=\frac{1}{4}\mu_X+54\Rightarrow\frac{7}{4}\mu_X=\frac{1}{4}\mu_X+54\Rightarrow\frac{6}{4}\mu_X=\frac{3}{2}\mu_X=54\Rightarrow\mu_X=36$.