數 學 考 科　詳解篇

■答案

【第壹部分】

單選題

1. A	2. D	3. A	4. C	5. D	6. C

多選題

7. ABC	8. AD	9. BCE	10. CE	11. BD	12. BC	13. AD

【第貳部分】

選填題

<table>
<tr><td colspan="3">A</td><td colspan="3">B</td><td colspan="2">C</td><td colspan="2">D</td></tr>
<tr><td>–</td><td>2</td><td>4</td><td>9</td><td>9</td><td>5</td><td>1</td><td>4</td><td>7</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">E</td><td>F</td><td colspan="3">G</td></tr>
<tr><td>4</td><td>5</td><td>3</td><td>–</td><td>1</td><td>6</td></tr>
</table>

■解析

【第壹部分】

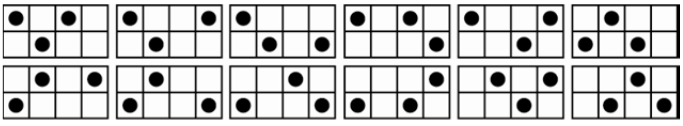
單選題

1. 令 $f(x)=x^4+2x^3+ax^2+bx+15$，已知 $f(x)=0$ 有四個相異有理根，
   $\therefore f(x)$ 有四個相異的整係數一次因式。根據一次因式檢驗法，一次因式可能爲 $(x\pm1),(x\pm3),(x\pm5),(x\pm15)$，
   $\therefore f(x)=x^4+2x^3+ax^2+bx+15=(x+1)(x-1)(x-3)(x+5)=x^4+2x^3-16x^2-2x+15$
   $a=-16$、$b=-2$，$b-a=14$。

2. 令目前質量爲 M，需要 x 年，依題意列出算式
   $M(\frac{1}{2})^{\frac{x}{30}}=M\cdot\frac{3}{64}\Rightarrow\log(\frac{1}{2})^{\frac{x}{30}}=\log\frac{3}{64}\Rightarrow\frac{x}{30}(\log1-\log2)=\log3-6\log2$
   $\Rightarrow\frac{x}{30}(-0.3010)=0.4771-6\times0.3010\Rightarrow x=30\times\frac{-1.3289}{-0.3010}\approx30\times4.4150=132.45$，約 132 年。

3. 建立空間坐標系，令 $A(0,0,0)$、$B(1,0,0)$、$C(1,1,0)$、$D(0,1,0)$、$E(0,0,1)$、$F(1,0,1)$、$G(1,1,1)$、$H(0,1,1)$
   $\therefore\overrightarrow{BH}=(-1,1,1)$，則
   (A) $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BH}=(-1,0,1)\cdot(-1,1,1)=2$　(B) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BH}=(0,1,0)\cdot(-1,1,1)=1$　(C) $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{BH}=(-1,1,-1)\cdot(-1,1,1)=1$
   (D) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BH}=(1,1,0)\cdot(-1,1,1)=0$　(E) $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{BH}=(1,1,-1)\cdot(-1,1,1)=-1$。

4. 令 $P(a,b)$，則 $\overrightarrow{OP}$ 在 y 軸上的正射影爲 $(0,b)$，最大值爲 $8+3=11$。

5. 不相鄰的情況如下， 共 12 種
   將 1、2、3 填入不相鄰的方法 $12\times3!\times5!=8640$。

6. 令梯長爲 L 公尺，$2 = L\times\sin 65° - L\times\sin 33°$

$$= L\times 0.9063 - L\times 0.5446$$

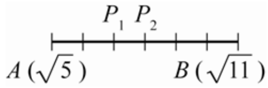
$$\Rightarrow L = \frac{2}{0.3617} \approx 5.53$$ 。

多選題

7. (A) $(\sqrt{11})^2 = 11$ 、 $(3.5)^2 = 12.25$ ，$\therefore \sqrt{11} < 3.5$

(B) $(\sqrt{11}-\sqrt{5})^2 = 16-2\sqrt{55} \approx 16-2\times 7.42 = 1.16$ 、 $(\sqrt{2})^2 = 2$ ，$\therefore \sqrt{11}-\sqrt{5} < \sqrt{2}$

(C) $\sqrt{7-\sqrt{48}} = \sqrt{7-2\sqrt{12}} = \sqrt{(\sqrt{4}-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4}-\sqrt{3} = 2-\sqrt{3} \approx 2-1.73 = 0.27 < 1$



(D)如圖，在數線上取 $A(\sqrt{5})$、$B(\sqrt{11})$，由分點公式得知 $\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{11}}{3}$ 爲 P_1、$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{11}}{2}$ 爲 P_2，$\therefore \frac{\sqrt{5}+\sqrt{11}}{2} > \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{11}}{3}$

(E) $|4x-12| < 2x \Rightarrow (4x-12)^2 < 4x^2 \Rightarrow 16^2 - 96x + 144 < 4x^2 \Rightarrow 12x^2 - 96x + 144 < 0$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 12 < 0 \Rightarrow (x-2)(x-6) < 0 \Rightarrow 2 < x < 6$ ，滿足的整數 x 爲 3 、 4 、 5 共 3 個。

8. (A) $y = x^3$ 爲遞增函數，$\therefore 0.6^3 < 0.7^3$ (B) $y = 0.6^x$ 爲遞減函數，$\therefore 0.6^{-0.3} > 0.6^{0.3}$

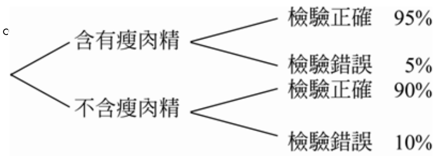
(C) $\log 6^{30} = 30\times\log 6 = 30\times 0.7781 = 23.343$ 、 $\log 7^{20} = 20\times\log 7 = 20\times 0.8451 = 16.902$ ，$\therefore 6^{30} > 7^{20}$

(D) $y = \log x$ 爲遞增函數，$\log 0.6 < \log 0.7$ (E) $\log_{0.5} x$ 爲遞減函數，$\therefore \log_{0.5} 0.6 > \log_{0.5} 0.7$ 。

9. (A) $0.02\times 0.95 + 0.98\times 0.1 = 0.117 > 0.1$ ，不正確 (B) $0.02\times 0.05 + 0.98\times 0.9 = 0.883 < 0.9$ ，正確

(C) $\frac{0.02\times 0.95}{0.02\times 0.95 + 0.98\times 0.1} \approx 0.162 < 0.2$ ，正確 (D) $\frac{0.98\times 0.1}{0.02\times 0.95 + 0.98\times 0.1} \approx 0.838 < 0.9$ ，不正確

(E) $\frac{0.98\times 0.9}{0.02\times 0.05 + 0.98\times 0.9} \approx 0.999 > 0.9$ ，正確。



10. (A) $\because \angle B$ 爲鈍角，$\therefore \cos B = -\frac{4}{5}$

(B) $\sin A = \sin[180° - (\angle B + \angle C)] = \sin(B+C) = \sin B\cos C + \cos B\sin C = \frac{3}{5}\times\frac{12}{13} + (-\frac{4}{5})\times\frac{5}{13} = \frac{16}{65}$

(C)根據正弦定理，$\frac{\overline{AC}}{\sin B} = \frac{\overline{AB}}{\sin C} \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\frac{3}{5}} = \frac{75}{\frac{5}{13}} \Rightarrow \overline{AC} = 117$

(D) $\triangle ABC$ 的面積 $= \frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A = \frac{1}{2}\times 75\times 117\times\frac{16}{65} = 1080$

(E)根據正弦定理，$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{AB}}{\sin C} \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\frac{16}{65}} = \frac{75}{\frac{5}{13}} \Rightarrow \overline{BC} = 48$ ，$\therefore \triangle ABC$ 的周長 $= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 75 + 48 + 117 = 240$ 。

11. (A)將 $(2,3,-1)$ 代入 $\frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \frac{2+2}{1} \neq \frac{3+3}{2} \neq \frac{-1-1}{1}$ ，故 $(2,3,-1)$ 不在 L_1 上

(B) $L_2 : \begin{cases} 2x+y+7=0 \\ 3y+2z+7=0 \end{cases}$ 的方向向量爲 $(2,-4,6) \perp L_1$ 的方向向量 $(1,2,1)$ ，又 L_1 上的點 $(-2,-3,1)$ 在 L_2 ，$\therefore L_1$ 和 L_2 垂直

(C) L_1 的方向向量 $(1,2,1)$ 與平面 $x+2y+z+7=0$ 的法向量 $(1,2,1)$ 平行，$\therefore L_1$ 和平面 $x+2y+z+7=0$ 垂直

(D)由(B)得知有一平面同時包含 L_1 和 L_2

(E) L_3 的方向向量 $(1,0,0) \nparallel L_2$ 的方向向量 $(2,-4,6)$ ，又將 $(s,0,0)$ 代入 $L_2 : \begin{cases} 2x+y+7=0 \\ 3y+2z+7=0 \end{cases}$ 無解，$\therefore L_1$ 和 L_2 歪斜，無法用一個平面包含。

12. $a_1=-\frac{1}{3}$、$a_2=\frac{1}{1-a_1}=\frac{1}{1-(-\frac{1}{3})}=\frac{3}{4}$、$a_3=\frac{1}{1-a_2}=\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=4$、$a_4=\frac{1}{1-a_3}=\frac{1}{1-4}=-\frac{1}{3}\Rightarrow a_{3k+1}=-\frac{1}{3}$、$a_{3k+2}=\frac{3}{4}$、

$a_{3k+3}=4$，k 爲非負整數

(A) $a_{2018}=a_{3\times612+2}=\frac{3}{4}>0$ (B) $a_{99}=a_{3\times33}=4$、$a_{100}=a_{3\times33+1}=-\frac{1}{3}$，$\therefore a_{99}>a_{100}$

(C) $a_{98}\times a_{99}=a_{3\times32+2}\times a_{3\times33}=\frac{3}{4}\times4=3>0$ (D) $\forall n\in\mathbb{N}$，$a_n\times a_{n+1}\times a_{n+2}=(-\frac{1}{3})\times\frac{3}{4}\times4<0$

(E) $\forall n\in\mathbb{N}$，$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=(-\frac{1}{3})+\frac{3}{4}+4>0$。

13.

X	20	18	22	26	29	$\overline{X}=23$
Y	13	16	20	21	25	$\overline{Y}=19$
$X_i-\overline{X}$	-3	-5	-1	3	6	
$Y_i-\overline{Y}$	-6	-3	1	2	6	
$(X_i-\overline{X})^2$	9	25	1	9	36	$\sum=80$
$(Y_i-\overline{Y})^2$	36	9	1	4	36	$\sum=86$
$(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})$	18	15	-1	6	36	$\sum=74$

(A) $\overline{Y}=19$ (B)海水年均溫的標準差 $\sigma_X=\sqrt{\frac{80}{5}}=4<5$ (C) $\sigma_{X'}=\sigma_{\frac{9}{5}X+32}=\frac{9}{5}\sigma_X=\frac{9}{5}\times4=7.2<39$

(D) $r=\frac{74}{\sqrt{80}\sqrt{86}}\approx0.89>0.8$ (E) Y 對 X 的迴歸直線 $y-19=\frac{74}{80}(x-23)\Rightarrow y=\frac{37}{40}x-\frac{91}{40}$，將 $x=30$ 代入

$\Rightarrow y=\frac{37}{40}\times30-\frac{91}{40}\approx25.48<26$。

【第貳部分】

選填題

A. $\because f(1)=-2$、$f(-2)=4$、$f(3)=-6$，$\therefore$ 令 $f(x)=a(x-1)(x+2)(x-3)-2x$

又 $f(4)=82\Rightarrow f(4)=a(4-1)(4+2)(4-3)-2\times4=82\Rightarrow a=5$

即 $f(x)=5(x-1)(x+2)(x-3)-2x\Rightarrow f(2)=5(2-1)(2+2)(2-3)-2\times2=-24$。

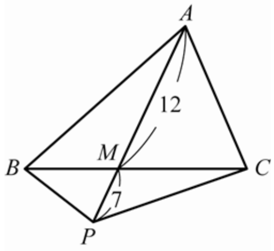
B. $\sum_{k=1}^{10}(a_k+2^{k-1})=\sum_{k=1}^{10}a_k+(1+2+\cdots+2^9)=\sum_{k=1}^{10}a_k+\frac{1(2^{10}-1)}{2-1}=\sum_{k=1}^{10}a_k+1023=2018$

$\Rightarrow\sum_{k=1}^{10}a_k=995$。

C. 轉移矩陣 $\begin{bmatrix}\frac{1}{10}&\frac{3}{10}\\\frac{9}{10}&\frac{7}{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{10}x+\frac{3}{10}y=x\\x+y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{4}\\y=\frac{3}{4}\end{cases}$

$\therefore$ 長期而言，夾中機率為 $\frac{1}{4}$。

D. 設直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 M，令 $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AP}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AP}=t(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC})$

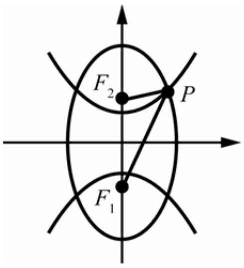


$\because B-M-C$ 三點共線，$\therefore\frac{3}{4}t+\frac{5}{6}t=1\Rightarrow t=\frac{12}{19}$，$\therefore\overline{AM}:\overline{MP}=12:7$

$\triangle PBC$ 的面積 $=\frac{7}{12}\triangle ABC=\frac{7}{12}\times 6=\frac{7}{2}$。

E. 設 P 點在第一象限，$\Gamma_1:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1\Rightarrow a_1=5$、$b_1=4$、$c_1=3$，$\Gamma_2:\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1\Rightarrow a_2=2$、$b_2=\sqrt{5}$、$c_2=3$

$\Rightarrow\begin{cases}\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a_1=10\\\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=2a_2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overline{PF_1}=7\\\overline{PF_2}=3\end{cases}$

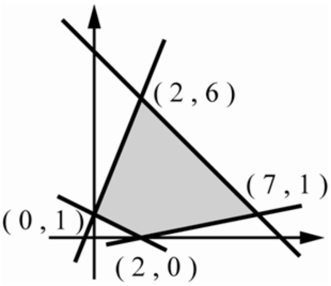


又 $\overline{F_1F_2}=2c=6$，$\triangle PF_1F_2$ 的半周長 $=\frac{7+3+6}{2}=8$，

$\triangle PF_1F_2$ 的面積 $=\sqrt{8(8-7)(8-3)(8-6)}=4\sqrt{5}$。

F.

	$(0,1)$	$(2,0)$	$(2,6)$	$(7,1)$
$ax+y$	1	$2a$	$2a+6$	$7a+1$



又點 $(2,6)$ 為目標函數 $ax+y$ 產生最大值的唯一點，

$\begin{cases}2a+6>1\\2a+6>2a\\2a+6>7a+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>-2.5\\6>0\\a<1\end{cases}\Rightarrow -2.5<a<1$，$\therefore$ 整數 a 為 -2、-1、0 共 3 個。

G. 令 $(x-1)^8=(x^2+1)Q(x)+ax+b$

$x=i$ 代入得 $(i-1)^8=(i^2+1)Q(i)+ai+b\Rightarrow 16=ai+b\Rightarrow a=0$、$b=16$

$\therefore a-b=-16$。