數 學 考 科　詳解篇

■答案

【第壹部分】

單選題

1. B	2. E	3. E	4. B	5. C	6. C	7. C

多選題

8. BCD	9. ACE	10. ACD	11. ACD	12. BDE

【第貳部分】

選填題

A		B		C		D				
3	0	2	8	2	6	8	1	1	2	5

E		F		G		H	
9	0	5	0	1	2	5	2

■解析

【第壹部分】

單選題

1. $f(2)=f(2-5)=f(-3)=-f(3)=-3$
   $f(1)=f(1-5)=f(-4)=-f(4)=-4$
   $\therefore f(2)-f(1)=(-3)-(-4)=1$。

2. $f(x)$ 有另一根 $2-i$，
   $f(x)=x^4+ax^3+12x^2+bx-5=(x-(2+i))\cdot(x-(2-i))\cdot q(x)=(x^2-4x+5)(x^2+cx-1)$
   $\begin{cases}c-4=a\\-1-4c+5=12\\5c+4=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-6\\b=-6\\c=-2\end{cases}$，$x^2-2x-1=0\Rightarrow x=1\pm\sqrt{2}$
   (A) $2-i$　(B) $a=-6$　(C) $b=-6$　(D) $-1<1-\sqrt{2}<0$　(E) $2<1+\sqrt{2}<3$。

3. (A) $f(-100)=2^{-96}+(\frac{1}{2})^{-98}>0$　(B) $f(x)$ 之最大值不存在
   (C)由算幾不等式 $\dfrac{2^{x+4}+(\frac{1}{2})^{x+2}}{2}\geq\sqrt{2^{x+4}\cdot(\frac{1}{2})^{x+2}}$，故 $f(x)\geq 2\cdot\sqrt{2^4\cdot(\frac{1}{2})^2}=4$，即最小值為4
   (D)(E)當 $2^{x+4}=(\frac{1}{2})^{x+2}$ 時 $f(x)$ 達最小值，即 $2^{x+4}=2^{-x-2}\Rightarrow x+4=-x-2\Rightarrow x=-3$。

4. 令 $a_{n+1}+x=2(a_n+x)$
   $\Rightarrow a_{n+1}+x=2a_n+2x$
   $\Rightarrow a_{n+1}=2a_n+x$
   $\Rightarrow x=-3$

   故 $a_{n+1}-3=2(a_n-3)$
   $a_{11}-3=2(a_{10}-3)$
   $a_{10}-3=2(a_9-3)$
   $\vdots$
   $a_2-3=2(a_1-3)$
   $\Rightarrow a_{11}-3=2^{10}(a_1-3)=1024(4-3)\Rightarrow a_{11}=1027$

5. θ為第二象限角且 $\sin\theta=\frac{4}{5}\Rightarrow\cos\theta=\frac{-3}{5}$，

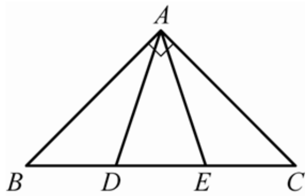
$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{3}{5}}=2\Rightarrow\frac{1+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{1+2}{1-2}=-3$$ 。

6. $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|^2\Rightarrow|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AC}|^2$

則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，即 $\angle A=90^\circ$，$\overline{BC}=6\Rightarrow\overline{AB}=\overline{AC}=3\sqrt{2}$

由分點公式知 $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\Rightarrow|\overrightarrow{AD}|^2=|\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}|^2$

$=\frac{4}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{9}|\overrightarrow{AC}|^2=\frac{4}{9}\cdot18+\frac{1}{9}\cdot18=10\Rightarrow|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{10}$ 。



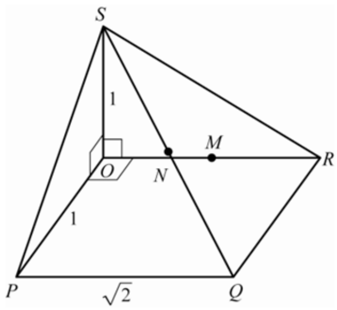
7. 建立空間坐標系，令 $O(0,0,0)$、$P(1,0,0)$、$Q(1,\sqrt{2},0)$、$R(0,\sqrt{2},0)$、$S(0,0,1)$，則 $M(0,\frac{\sqrt{2}}{2},0)$、$N(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})$

平面 OPS 之法向量 $\overrightarrow{n_1}\,/\!/\,(0,1,0)$，取 $\overrightarrow{n_1}=(0,1,0)$，平面 MNP 之法向量 $\overrightarrow{n_2}\,/\!/\,\overrightarrow{PM}\times\overrightarrow{PN}$

而 $\overrightarrow{PM}\times\overrightarrow{PN}=(-1,\frac{\sqrt{2}}{2},0)\times(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{4}(-2,\sqrt{2},0)\times(-1,\sqrt{2},1)$

$=\frac{1}{4}(\sqrt{2},2,-\sqrt{2})$，取 $\overrightarrow{n_2}=(\sqrt{2},2,-\sqrt{2})$

$$\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\times|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{(0,1,0)\cdot(\sqrt{2},2,-\sqrt{2})}{1\cdot\sqrt{2+4+2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos45^\circ$$ 。



多選題

8. (A)因 $9.52^7\in\mathbb{Q}$ 且 $9^{5.27}\notin\mathbb{Q}$，故 $9.52^7+9^{5.27}\notin\mathbb{Q}$　(B) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{32}=2^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{2}{3}}\cdot2^{\frac{5}{6}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}}=2^2=4\in\mathbb{Q}$

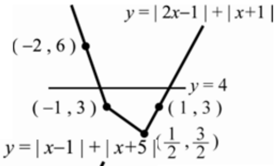
(C) $\log_{\sqrt{\pi}}\sqrt[3]{\pi}=\frac{\log\sqrt[3]{\pi}}{\log\sqrt{\pi}}=\frac{\log\pi^{\frac{1}{3}}}{\log\pi^{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{3}\log\pi}{\frac{1}{2}\log\pi}=\frac{2}{3}\in\mathbb{Q}$

(D)原式 $=\sin15^\circ\cdot\sin75^\circ\cdot\sin75^\circ\cdot\sin15^\circ=(\sin15^\circ\cdot\sin75^\circ)^2=(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4})^2=\frac{1}{16}\in\mathbb{Q}$

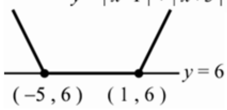
(E)利用一次因式檢驗法可知 $x+1$、$2x+1$ 皆為因式，則 $2x^4+5x^3+2x^2-2x-1=(x+1)(2x+1)(x^2+x-1)$

原方程式之根為 -1、$-\frac{1}{2}$、$\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，其中唯一正根 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\notin\mathbb{Q}$ 。

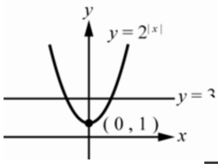
9. (A) $\because\begin{cases}y=|2x-1|+|x+1|\\y=4\end{cases}$ 恰有2個相異交點，$\therefore|2x-1|+|x+1|=4$ 恰有2個相異實數解



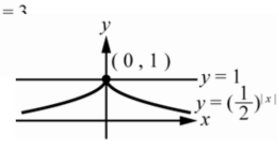
(B) $\because\begin{cases}y=|x-1|+|x+5|\\y=6\end{cases}$ 有無窮多個交點，$\therefore|x-1|+|x+5|=6$ 有無窮多個實數解



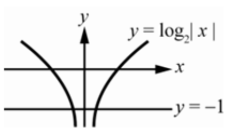
(C) $\because\begin{cases}y=2^{|x|}\\y=3\end{cases}$ 恰有2個相異交點，$\therefore2^{|x|}=3$ 恰有2個相異實數解



(D) $\because\begin{cases}y=(\frac{1}{2})^{|x|}\\y=1\end{cases}$ 恰有1個交點，即 $(0,1)$，$\therefore(\frac{1}{2})^{|x|}=1$ 恰有1個實數解



(E) $\because\begin{cases}y=\log_2|x|\\y=-1\end{cases}$ 恰有2個相異交點，$\therefore\log_2|x|=-1$ 恰有2個相異實數解



10. (A) $\mu_{X'} = 3\mu_X - 2 = 22$ 、 $\mu_{Y'} = \frac{1}{3}\mu_Y + 2 = 5$ (B) $\sigma_{X'} = 3\sigma_X = 1.2$ 、 $\sigma_{Y'} = \frac{1}{3}\sigma_Y = 1$ (C) $r(X', Y') = r(X, Y) = 0.8$

(D) $\frac{y-9}{3} = 0.8 \times \frac{x-8}{0.4} \Rightarrow y = 6x - 39$ (E) $\frac{y'-5}{1} = 0.8 \times \frac{x'-22}{1.2} \Rightarrow y' = \frac{2}{3}x' - \frac{29}{3}$ 。

11. 將 $(6,6,0)$ 與 $(-1,-1,7)$ 分別代入 E_1 、 E_2 、 E_3 中，

(A) $\begin{cases} 6+12+0a=b \\ -1-2+7a=b \end{cases} \Rightarrow (a,b)=(3,18)$ (B) $\begin{cases} 12+18+0c=d \\ -2-3+7c=d \end{cases} \Rightarrow (c,d)=(5,30)$

(C) $\begin{cases} 18-24+0e=f \\ -3+4+7e=f \end{cases} \Rightarrow (e,f)=(-1,-6)$ (D)故 $\begin{cases} E_1: x+2y+3z=18 \\ E_2: 2x+3y+5z=30 \\ E_3: 3x-4y-z=-6 \end{cases}$ ，將 $(3,3,3)$ 代入 E_1 、 E_2 、 E_3 皆成立

(E)將 $(-3,-3,-3)$ 代入 E_1 、 E_2 、 E_3 皆不成立。

12. 轉移矩陣 $P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$ ， $X_0 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix}$ ，則一個月後 $X_1 = PX_0 = \begin{bmatrix} 0.44 \\ 0.25 \\ 0.31 \end{bmatrix}$ ，兩個月後 $X_2 = PX_1 = \begin{bmatrix} 0.464 \\ 0.231 \\ 0.305 \end{bmatrix}$

令達穩定狀態後 $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ，則 $PX = X$ ，即 $\begin{cases} 0.8x+0.2y+0.2z=x \\ 0.1x+0.5y+0.2z=y \\ x+y+z=1 \end{cases}$ ，解得 $x=\frac{1}{2}$ 、 $y=\frac{3}{14}$ 、 $z=\frac{2}{7}$ 。

【第貳部分】

選填題

A. $\begin{cases} 2a_1 = (a_1 \cdot r)\cdot(a_1 \cdot r^2) \\ a_1 r^3 + 2a_1 r^6 = \frac{5}{4}\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 r^3 = 2 \\ 2+2\cdot 2r^3 = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow 4r^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow r^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$ ，代回得 $a_1 = 16$

$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 16+8+4+2 = 30$ 。

B. 令小泰排週一的事件爲 A ，小宇排週五的事件爲 B ，小文與小化排相鄰兩天的事件爲 C

所求 $= |A' \cap B' \cap C| = |(A \cup B)' \cap C| = |C| - |(A \cup B) \cap C| = |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)|$

$= |C| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap C \cap B \cap C|) = |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$= 4! \times 2! - 3! \times 2! - 3! \times 2! + 2! \times 2! = 28$ 。

C. 一般項爲 $C_k^{100}(\sqrt{2}x)^k(\sqrt[4]{2}y)^{100-k}$ ，整理得 $C_k^{100} 2^{\frac{k}{2}} \cdot 2^{\frac{100-k}{4}} \cdot x^k \cdot y^{100-k}$ ，係數爲 $C_k^{100} \cdot 2^{25} \cdot 2^{\frac{k}{4}}$

當 $k = 0,4,8,12,\cdots,96,100$ 時係數爲有理數， $\frac{100-0}{4} + 1 = 26$ 。

D. 設命中率爲 p ， $1-(1-p)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow (1-p)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow 1-p = \frac{3}{5} \Rightarrow p = \frac{2}{5}$

p(至多命中 1 次) $= p$(恰命中 0 次) $+ p$(恰命中 1 次) $= (\frac{3}{5})^3 + C_1^3 \cdot (\frac{3}{5})^2(\frac{2}{5}) = \frac{81}{125}$ 。

E. $\frac{a}{\tan A}+\frac{b}{\tan B}=a+b\Rightarrow\frac{a\cos A}{\sin A}+\frac{b\cos B}{\sin B}=a+b$ 由正弦定理知

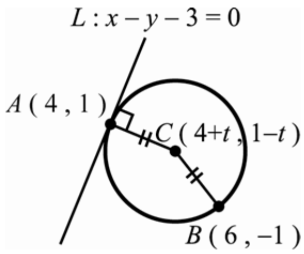
$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2R\Rightarrow 2R\cos A+2R\cos B=a+b\Rightarrow\cos A+\cos B=\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}=\sin A+\sin B$

$\sin A-\cos A=\cos B-\sin B\Rightarrow\sin A\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos A\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos B-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin B$

$\sin A\cdot\cos 45°-\cos A\cdot\sin 45°=\sin 45°\cdot\cos B-\cos 45°\cdot\sin B\Rightarrow\sin(A-45°)=\sin(45°-B)$

$A-45°=45°-B$ 或 $A-45°=180°-(45°-B)\Rightarrow A+B=90°$ 或 $A-B=180°$（矛盾）$\therefore\angle C=90°$ 。

F. 令圓心為 C ，$\overline{CA}\perp L$ ，又 $(1,-1)$ 為 L 一個法向量，則可設 $C(4+t,1-t),t\in\mathbb{R}$



$\overline{CA}=\overline{CB}\Rightarrow\sqrt{(4+t-4)^2+(1-t-1)^2}=\sqrt{(4+t-6)^2+(1-t+1)^2}$

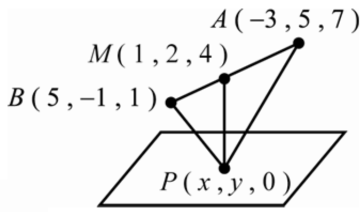
$\Rightarrow t^2+t^2=(t-2)^2+(t-2)^2\Rightarrow t=1$ ，$\therefore C(5,0)$ 。

G. <解一> $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=(x+3)^2+(y-5)^2+7^2+(x-5)^2+(y+1)^2+1^2$

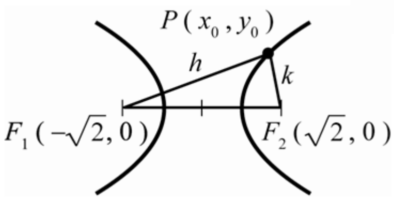
$=2x^2-4x+2y^2-8y+110=2(x-1)^2+2(y-2)^2+100\geq 100$

當 $x=1$ 、 $y=2$ 時達到最小值 100 ，$\therefore(x_0,y_0)=(1,2)$ 。

<解二> $M(1,2,4)$ 為 $\overline{AB}$ 中點，在 $\triangle ABP$ 中，由中線定理知 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{PM}^2)$ ，而 $\overline{AM}$ 為定值，故當 $\overline{PM}$ 達到最小值時，$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 達最小值，此時 P 為 M 在 xy 平面上之投影點 $(1,2,0)$ ，$\therefore(x_0,y_0)=(1,2)$ 。



H. $x^2-y^2=1\Rightarrow\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{1}=1\Rightarrow\begin{cases}a^2=1\\b^2=1\\c^2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\c=\sqrt{2}\end{cases}$



故可設 $F_1(-\sqrt{2},0)$ 、 $F_2(\sqrt{2},0)$ ，則 $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{2}$ ，令 $\overline{PF_1}=h$ 、 $\overline{PF_2}=k$ ，則 $|h-k|=2a=2$ ，不失一般性，

可設 $P(x_0,y_0)$ 在第一象限，則 $h-k=2$

在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由餘弦定理知 $(2\sqrt{2})^2=h^2+k^2-2hk\cdot\cos 60°=h^2+k^2-hk=(h-k)^2+hk=2^2+hk$ 則 $hk=4$ ，

又 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=(-\sqrt{2}-x_0,-y_0)\cdot(\sqrt{2}-x_0,-y_0)=hk\cdot\cos 60°$

${x_0}^2-2+{y_0}^2=4\cdot\frac{1}{2}=2$ ，則 ${x_0}^2+{y_0}^2=4\cdots$① ，又 P 在 Γ 上，則 ${x_0}^2-{y_0}^2=1\cdots$② $\therefore$聯立①,② 得 ${x_0}^2=\frac{5}{2}$ 。