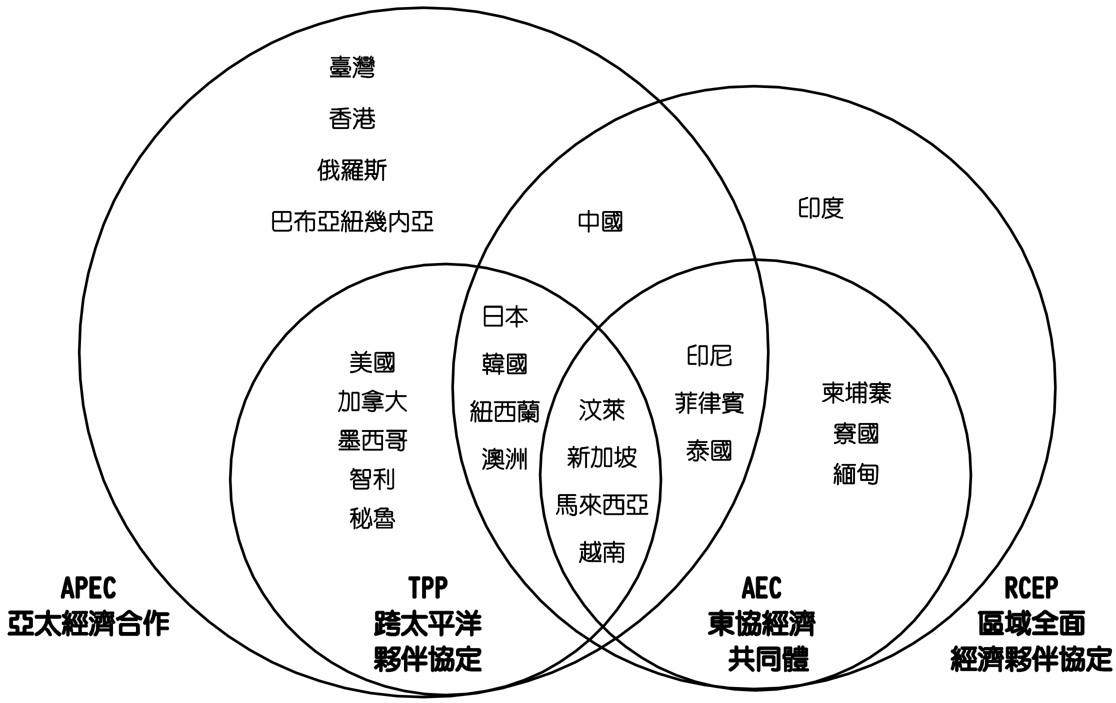
第壹部分：選擇題(占 60 分)

一、單選題(占 30 分)

說明：第 1. 題至第 6. 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是最適當的選項，畫記在答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分；未作答、答錯或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 在歐盟的整合成功及 WTO 杜哈回合貿易談判觸礁後，亞太地區正進行多項的區域貿易協定，下圖圓圈內的國家為各組織的成員(2014 年資料)，請問同時加入三個或三個以上組織的有幾個國家？



(1) 5 個　(2) 7 個　(3) 9 個　(4) 11 個　(5) 13 個

答案：(4)

解析：滿足條件的國家為日本、韓國、紐西蘭、澳洲、印尼、菲律賓、泰國、汶萊、新加坡、馬來西亞、越南，共 11 個國家

故選(4)。

2. 若 $a=3+\sqrt{15}$，$b=\sqrt{7}+\sqrt{17}$，$c=\sqrt{2}\times\sqrt{23}$，則下列選項哪一個是正確的？

(1) $a>c>b$　(2) $a>b>c$　(3) $c>a>b$　(4) $c>b>a$　(5) $b>a>c$

答案：(1)

解析：$\because a^2=24+2\sqrt{135}$

$b^2=24+2\sqrt{119}$

$c^2=46=24+2\sqrt{121}$

$\therefore a>c>b$

故選(1)。

3. 設$\triangle ABC$為等腰三角形且$\angle B=\angle C>45^\circ$，若$\sin B+\cos B=\dfrac{4}{3}$，則下列選項哪一個是正確的？

(1) $\angle A<15^\circ$

(2) $30^\circ<\angle A<45^\circ$

(3) $45^\circ<\angle A<60^\circ$

(4) $60^\circ<\angle A<75^\circ$

(5) $\angle A>75^\circ$

答案：(3)

解析：設$\angle B=\theta$

$\because(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+\sin 2\theta$，即$\left(\dfrac{4}{3}\right)^2=1+\sin 2\theta$

$\therefore \sin 2\theta=\dfrac{7}{9}$

$\Rightarrow \sin A=\sin(180^\circ-2\theta)=\sin 2\theta=\dfrac{7}{9}$

又$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\dfrac{7}{9}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$且$\angle A=180^\circ-2\theta<90^\circ$

$\therefore 45^\circ<\angle A<60^\circ$

故選(3)。

4. 平行四邊形$ABCD$中，$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{QC}+2\overrightarrow{QD}=\overrightarrow{0}$，若$\overrightarrow{PQ}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，則$x$的值為何？

(1) 2

(2) $\dfrac{4}{3}$

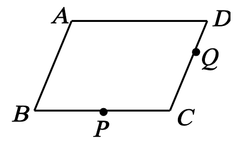
(3) $\dfrac{1}{2}$

(4) $-\dfrac{1}{3}$

(5) $-\dfrac{2}{3}$

答案：(5)

解析：$\because \overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$ $\therefore \overrightarrow{PC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$



同理，由$\overrightarrow{QC}+2\overrightarrow{QD}=\overrightarrow{0}$得$\overrightarrow{CQ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CD}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow x=-\dfrac{2}{3}$

故選(5)。

5. 圓心在直線 L：$x+y=1$ 上，且與兩直線 L_1：$3x-4y+2=0$，L_2：$4x-3y=0$ 均相切的圓有多少個？
(1) 0 個
(2) 1 個
(3) 2 個
(4) 3 個
(5)無限多個

答案：(2)

解析：∵圓心在直線 $x+y=1$ 上
設圓心為（t , $1-t$）
又此圓與 L_1、L_2 均相切
$\therefore \dfrac{|3t-4(1-t)+2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|4t-3(1-t)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$
化簡得 $|7t-2|=|7t-3|$，解得 $t=\dfrac{5}{14}$
∴僅可決定出 1 個圓
故選(2)。

6. 設等差數列〈a_n〉的公差為 d，且 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$ 表前 n 項的和。若 $S_{10}<S_{11}$，$S_{11}>S_{12}$，則下列選項哪一個是錯誤的？
(1) $d<0$
(2) $a_1>0$
(3) $S_9>0$
(4) $S_{23}>0$
(5)當 $n=11$ 時，S_n 有最大值

答案：(4)

解析：(1) ○：∵ $a_{11}=S_{11}-S_{10}>0$，$a_{12}=S_{12}-S_{11}<0$　∴$d=a_{12}-a_{11}<0$
(2) ○：∵ $a_{11}=a_1+10d>0$　∴ $a_1>0$
(3) ○：∵ $S_9=9a_5>0$
(4) ╳：∵ $S_{23}=23a_{12}<0$
(5) ○：∵〈a_n〉從第 12 項開始為負　∴ S_{11} 為 S_n 中的最大值
故選(4)。

二、多選題（占 30 分）

說明：第 7. 題至第 12. 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的，選出正確選項畫記在答案卡之「解答欄」。每題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

7. 原本訂價為 100 元的商品，若商家以 76 元賣出，則我們稱為把該商品打 7.6 折。在黃昏市場中有三家服飾攤都販賣個性 T 恤，每件 200 元。現在接近收攤時間，三家服飾攤都打算降價促銷，其方案分別如下：

甲：3 件 500 元，但不足 3 件的部分每件以原價 200 元賣出。

乙：買 2 件送 1 件，但只買 2 件時，每件仍以原價 200 元賣出。

丙：每件 150 元。

請選出下列正確的選項。

(1)甲攤商大約是打 8.3 折

(2)乙攤商大約是打 6.7 折

(3)丙攤商是打 7.5 折

(4)若小明恰好要買 5 件 T 恤，則到乙攤商買，付出的錢最少

(5)若小明恰好要買 50 件 T 恤，則到乙攤商買，付出的錢最少

答案：(3)(5)

解析：(1)(2) ╳：甲、乙兩攤商的折扣數會因為買的數量而不同

但甲攤商的最低折扣數為 8.3 折 $\left(\because \dfrac{500}{600} \approx 0.83\right)$

而乙攤商的最低折扣數為 6.7 折 $\left(\because \dfrac{2}{3} \approx 0.67\right)$

(3) ○：丙攤商的折扣數為 7.5 折 $\left(\because \dfrac{150}{200} = 0.75\right)$

(4) ╳：若小明恰好要買 5 件 T 恤，

則在甲攤商、乙攤商、丙攤商買分別要付 900 元、800 元、750 元

(5) ○：若小明恰好要買 50 件 T 恤，

則在甲攤商、乙攤商、丙攤商買分別要付 8400 元、6800 元、7500 元

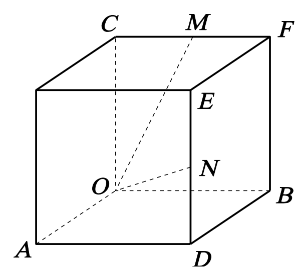
故選(3)(5)。

8. 已知等軸雙曲線Γ 的一條漸近線為 $x+y=0$，中心坐標為 $(1, -1)$且Γ 過點 $(4, 0)$，試問下列敘述哪些是正確的？
(1)Γ 的兩漸近線互相垂直
(2)此雙曲線的貫軸長等於共軛軸長
(3) $x-y=0$ 為Γ 的另外一條漸近線
(4)Γ 的貫軸在直線 $x=1$ 上
(5)若 (a, b)，(a', b') 為此雙曲線在第一象限上的兩點且 $a<a'$，則 $b<b'$

答案：(1)(2)(5)

解析：(1) ○
(2) ○
(3) ╳：∵Γ 的另一條漸近線會垂直 $x+y=0$ 且過點$(1, -1)$
∴所求為 $x-y-2=0$
(4) ╳：設雙曲線的方程式為$(x+y)(x-y-2)=k$
把 $(4, 0)$ 代入，得 $k=4\times2=8$
化簡，得 $\frac{(x-1)^2}{8}-\frac{(y+1)^2}{8}=1$　∴貫軸在直線 $y+1=0$ 上
(5) ○：∵Γ 的圖形在第一象限為遞增
故選(1)(2)(5)。

9. 右圖是空間坐標中的一個正立方體，設 $O(0, 0, 0)$，$A(4, 0, 0)$，$B(0, 4, 0)$，$C(0, 0, 4)$，若$\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{CM}$，$\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{DN}$，試選出下列正確的選項。



(1) $\overrightarrow{AF}$ 與$\overrightarrow{CD}$ 的夾角為 90°
(2) $\overrightarrow{AC}$ 與$\overrightarrow{BD}$ 的夾角為 45°
(3) $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$
(4)△OMN 的面積為 $2\sqrt{29}$
(5) $\overrightarrow{OM}$ 與 $\overrightarrow{ON}$ 的夾角為 60°

答案：(3)(4)

解析：(1) ╳：∵四邊形 $ACFD$ 為長寬不等的矩形
(2) ╳：$\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{BD}$ 的夾角為 135°
(3) ○：$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$
(4) ○：∵ $\overrightarrow{OM}=(0, 2, 4)$，$\overrightarrow{ON}=(4, 4, 2)$
∴△OMN 的面積$=\frac{1}{2}\sqrt{20\times36-(8+8)^2}=2\sqrt{29}$
(5) ╳：∵ $\frac{1}{2}\times\sqrt{20}\times6\times\sin\theta=2\sqrt{29}$　∴$\sin\theta=\frac{\sqrt{145}}{15}$
故選(3)(4)。

10. 設 A 為 2x2 的矩陣，已知 $A\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}$，試選出正確的選項。

(1) $A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

(2) $A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

(3) $A=\begin{bmatrix}0&2\\-1&2\end{bmatrix}$

(4) $[\,1\quad -1\,]\,A=[\,1\quad 0\,]$

(5) $A^{-1}=\begin{bmatrix}2&-2\\1&0\end{bmatrix}$

答 案：(1)(3)(4)

解析：(1) ○：$\because A\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}=A\left(\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}$

$\therefore A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

(2) ╳：$\because A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=A\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$

(3) ○：$\because A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$　$\therefore A=\begin{bmatrix}0&2\\-1&2\end{bmatrix}$

(4) ○：$[\,1\quad -1\,]\,A=[\,1\quad 0\,]$

(5) ╳：$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-2\\1&0\end{bmatrix}$

故選(1)(3)(4)。

11. 有十個數值資料：5，5，5，3，3，8，5，8，9，9，現在由此十個數中任取一數捨棄，剩下 9 個數字，則捨棄之前後哪些統計量必定不變？

(1)算術平均數

(2)中位數

(3)標準差

(4)變異數

(5)全距

答 案：(2)(5)

解析：由小到大排列為 3，3，5，5，5，5，8，8，9，9

$\because$3，8，9 皆有 2 個，5 有 4 個

又第 5 數與第 6 數皆為 5

$\therefore$刪去任何一數，全距與中位數皆不變

故選(2)(5)。

12. 設 $f(x)$ 為實係數的六次多項式，且滿足 $f(-1)=1$，$f(1)=3$，$f(3)=5$，若 $f(x)$ 除以 $(x+1)(x-1)(x-3)$ 的餘式為 $r(x)$，下列哪些選項是正確的？
(1) $r(x)$為過三點 $(-1, 1)$、$(1, 3)$、$(3, 5)$的插值多項式
(2) $r(x)=x+2$
(3) $f(x)$除以 $(x+1)(x-1)$ 的餘式為 $r(x)$
(4) $f(3)=r(3)$
(5)方程式 $f(x)-r(x)=0$ 至少有四個實根

答案：(1)(2)(3)(4)(5)

解析：(1) ○：$\because \deg r(x)\leq 2$ 且 $r(-1)=1$，$r(1)=3$，$r(3)=5$
(2) ○：$\because$直線 $y=x+2$ 通過 $(-1, 1)$、$(1, 3)$、$(3, 5)$ 三點　$\therefore r(x)=x+2$
(3) ○：令 $f(x)=(x+1)(x-1)(x-3)Q(x)+x+2 \Rightarrow f(x)$ 除以 $(x+1)(x-1)$ 的餘式為 $r(x)=x+2$
(4) ○：$f(3)=5=r(3)$
(5) ○：$\because f(x)-r(x)=(x+1)(x-1)(x-3)Q(x)$ 且 $Q(x)$ 為三次多項式
$\therefore$方程式 $Q(x)=0$ 至少有一個實根$\Rightarrow$方程式 $f(x)-r(x)=0$ 至少有四個實根
故選(1)(2)(3)(4)(5)。

第貳部分：選填題（占 40 分）

說明：1. 第 A. 至 H. 題，將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號（13－29）。
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 翰林大樓共有 7 層，現在有 5 個人從一樓同時進入電梯要到其他的樓層，則這 5 個人所要到達的樓層皆不同的機率為 $\dfrac{⑬}{⑭⑮}$ 。(化為最簡分數)

答案：$\dfrac{5}{54}$

解析：每個人可到達的樓層皆有 6 種選擇
$\therefore$樣本空間的個數為 6^5 種
若每個人都要到達不同樓層，其方法為 P^6_5，故所求的機率為 $\dfrac{P^6_5}{6^5}=\dfrac{5}{54}$ 。

B. 蘇迪勒颱風過後，由於原水濁度過高，自來水公司決定本週分區暫停供水七天。若在這七天中，小林、小翰、小龍三人的家都恰有一天停水，而且三家的停水日期都不相同，則對這三家而言，有 ⑯⑰⑱ 種可能的停水情形。

答案：210

解析：視為林、翰、龍與 4 個停的直線排列
其排法數有 $\dfrac{7!}{4!}=210$
故這三家的停水情形有 210 種可能。

C. 在空間坐標中，若直線 L：$\begin{cases}\dfrac{x+a}{2}=\dfrac{z+1}{3}\\ y=3\end{cases}$ 落在平面 E：$bx+y+2z=7$ 上，則數對 $(a\,,b)=$ ＿(⑲ , ⑳㉑)＿。

答案：$(2\,,-3)$

解析：設點 $P(2t-a\,,3\,,3t-1)\in L$

把 P 點代入平面 E，得 $b(2t-a)+3+2(3t-1)=7$，

即 $(2b+6)t+(-ab-6)=0$

$\because L$ 落在平面 E 上　$\therefore$ 方程式的解 t 為任意實數

$\Rightarrow 2b+6=-ab-6=0$

故數對 $(a\,,b)=(2\,,-3)$。

〈另解〉

由題意知 $\begin{cases}\dfrac{x+a}{2}=\dfrac{z+1}{3}\\ y=3\\ bx+y+2z=7\end{cases}$ 有無限多解 $\Rightarrow \begin{cases}3x-2z=2-3a\\ bx+2z=4\end{cases}$ 有無限多解

$\therefore \dfrac{3}{b}=\dfrac{-2}{2}=\dfrac{2-3a}{4}$，故數對 $(a\,,b)=(2\,,-3)$。

D. 日本首相安倍晉三為挽救日本經濟讓日元進行貶值，自 2012 年 12 月開始的匯率由 1 美元對 90 日元，經過兩年的時間至 2014 年 12 月結束時已經到達 1 美元對 120 日元。設這兩年(24 個月)來美元對日元的匯率每個月的平均升幅為 $r\,\%$，則 r 值為＿㉒.㉓＿。(利用內插法四捨五入至小數點後第一位，$\log 1.01\approx 0.0043$，$\log 1.02\approx 0.0086$，$\log 1.03\approx 0.0128$)。

答案：1.2

解析：$\because 90\times(1+r\,\%)^{24}=120$，即 $(1+r\,\%)^{24}=\dfrac{4}{3}$

$\therefore 24\log(1+r\,\%)=\log 4-\log 3$

$\Rightarrow \log(1+r\,\%)\approx \dfrac{2\times 0.3010-0.4771}{24}\approx 0.0052$

由內插法，得 $1+r\,\%\approx 1.01+\dfrac{0.0052-0.0043}{0.0086-0.0043}\times 0.01\approx 1.012$

故 $r=1.2$。

E. 設 $(x\,,y)$ 滿足 $\begin{cases}3x+4y-12\le 0\\ x-y-2\le 0\\ 3x-y+3\ge 0\end{cases}$，若 $x=-1$，$y=-3$ 可使目標函數 $P=x-ay$ 取得最大值，則 a 值為＿㉔＿。

答案：1

解析：$\because$ 點 $(-1\,,-3)$ 落在可行解區域的邊界 $x-y-2=0$ 上

$\therefore P=x-ay$ 與 $x-y-2=0$ 的斜率相同

故 $a=1$。

F. 平面上兩點 A、B 的極坐標分別為 $A[4, 17^\circ]$、$B[12, 137^\circ]$，且 O 點為原點，若 M 為 $\overline{AB}$ 的中點，則 $\overline{OM}$ 的長度為 ㉕$\sqrt{㉖}$ 。(化為最簡根式)

答案：$2\sqrt{7}$

解析：$\because \angle AOB = 120^\circ$

$\therefore$ 設一直角坐標系，使得 $O(0, 0)$，$A(4, 0)$，$B(-6, 6\sqrt{3})$

$\Rightarrow M$ 點坐標為 $(-1, 3\sqrt{3})$

故 $\overline{OM} = \sqrt{1^2 + (3\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{7}$ 。

〈另解〉

$\because \angle AOB = 120^\circ$

由餘弦定理，知 $\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 12^2 - 2\times 4\times 12\times \cos 120^\circ} = 4\sqrt{13}$

由中線長公式，知 $4^2 + 12^2 = 2(\overline{OM}^2 + (2\sqrt{13})^2)$

故 $\overline{OM} = 2\sqrt{7}$ 。

G. 若不等式 $x^2 - 12x + k \le 0$ 的整數解 x 恰有 7 個，則 k 值的最大值為 ㉗㉘ 。

答案：27

解析：$\because f(x) = x^2 - 12x + k$ 的對稱軸為直線 $x - 6 = 0$

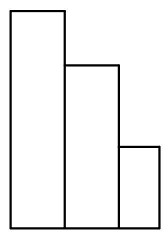
又 $f(x) \le 0$ 有 7 個整數解

$\therefore f(x) = 0$ 的解必在區間 $(2, 3]$ 與 $[9, 10)$

$\Rightarrow f(2) > 0$ 且 $f(3) \le 0$，得 $20 < k \le 27$

故 k 的最大值為 27。

H. 如右圖，由左至右分別為三個長寬比為 4 比 1、3 比 1、2 比 1 的矩形合併的圖案，已知長方形的長由左至右會遞減(有可能會相等)，若三個矩形的面積和為 104，則此圖案外圍周長有最大值時，左側矩形的長與中間矩形的長的比值為 ㉙ 。



答案：5

解析：設由左至右的長方形其長邊的長分別為 x、y、z

$\Rightarrow$ 三個長方形的面積為 $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{2}z^2 = 104$，

其外圍的周長為 $2x + 2\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z\right) = \frac{5}{2}x + \frac{2}{3}y + z$

由柯西不等式，知

$$\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{2}z^2\right)\left(25 + \frac{4}{3} + 2\right) \ge \left(\frac{5}{2}x + \frac{2}{3}y + z\right)^2 \Rightarrow 104\times\frac{85}{3} \ge \left(\frac{5}{2}x + \frac{2}{3}y + z\right)^2$$

當 $\dfrac{\frac{1}{2}x}{5} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}y}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}z}{\sqrt{2}}$ $\left(即 \frac{x}{10} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}\right)$時，所求周長有最大值

故 $\frac{x}{y} = 5$。

可能用到的參考公式及數值

1. $\triangle ABC$ 的餘弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$
2. 三角函數的二倍角公式：$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
3. 首項為 a，公差為 d 的等差數列，

   第 n 項為 $a_n=a+(n-1)d$，前 n 項之和為 $S_n=\dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$
4. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\pi\approx 3.142$
5. 對數值：$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$