龍騰文化學科能力測驗全真模擬試卷

數學考科　解答卷

■答案

第壹部分：選擇題

一、單選題

1.	2.	3.	4.	5.	6.
2	1	5	4	2	3

二、多選題

7.	8.	9.	10.	11.	12.
25	35	135	23	124	23

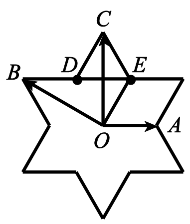
第貳部分：選填題

⑬	⑭	⑮	⑯	⑰	⑱	⑲	⑳	㉑	㉒	㉓	㉔	㉕	㉖	㉗	㉘	㉙	㉚
1	8	1	3	2	1	0	2	0	5	3	5	7	2	1	0	1	2

■解析

1. 因為一個數是另一個數的兩倍有 1, 2 與 2, 4 兩種情形，所以機率為 $\frac{2}{C_2^4}=\frac{1}{3}$ ．故選(2)．

2. 因為 $3x^2-x+1$ 恆正，
所以 $x^2+ax+b\le 0$ 的解為 $-1\le x\le 3$ ．
由 $(x+1)(x-3)\le 0\Rightarrow x^2-2x-3\le 0$ ，
得 $a=-2$ ， $b=-3$ ，即 $a+b=-5$ ．
故選(1)．

3. 

因為

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}$

$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}+\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BE}\right)$

$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}+\left(\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OA}\right)$

$=3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$ ，

所以 $x+y=3+2=5$ ．故選(5)．

4. 設 $A(a,0,0)$ ， $B(0,b,0)$ ， $C(0,0,c)$ ．
因為重心為 $(-3,2,-1)$ ，所以
$\left(\frac{a+0+0}{3},\frac{0+b+0}{3},\frac{0+0+c}{3}\right)$
$=(-3,2,-1)$ ．
解得 $a=-9$ ， $b=6$ ， $c=-3$ ．
利用平面的截距式，得 $E:\frac{x}{-9}+\frac{y}{6}+\frac{z}{-3}=1$ ，即
$E:2x-3y+6z=-18$ ，

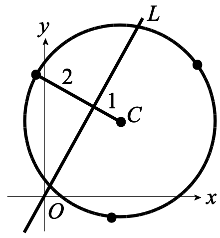
其法向量為 $\overrightarrow{n_1}=(2,-3,6)$，

而 xy 平面的法向量為 $\overrightarrow{n_2}=(0,0,1)$．

設平面 E 與 xy 平面銳交角為 θ，則

$$\cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\right|=\frac{6}{7}\ .$$

故選(4)．

5. 

圓 $C:(x-2)^2+(y-2)^2=9$ 的圓心 $C(2,2)$，半徑 $r=3$．

設 $L: y=mx$，即 $mx-y=0$， $m>1$．

因為圓上恰有三個不同點到 L 的距離為 2，所以圓心到 L 的距離為1，即

$$\frac{|2m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1\Rightarrow|2m-2|=\sqrt{m^2+1}\ .$$

兩邊平方，得

$4m^2-8m+4=m^2+1\Rightarrow 3m^2-8m+3=0$，

解得 $m=\dfrac{4\pm\sqrt{7}}{3}$（因為 $\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\approx0.5<1$，所以不合），

即 $m=\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\approx2.2$．故選(2)．

6. 設 $A(t,\log_2 t)$．因為 $\overline{OA}:\overline{AB}=1:3$，所以 $B(4t,4\log_2 t)$．

又因為 B 在 $y=\log_2 x$ 的圖形上，所以

$4\log_2 t=\log_2 4t\Rightarrow 4\log_2 t=2+\log_2 t\Rightarrow 3\log_2 t=2$，

解得 $\log_2 t=\dfrac{2}{3}\Rightarrow t=2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{4}$．故選(3)．

7. 令題目三個式子由上到下，分別為①，②，③式．

由 ①+②，得 $2x+2z=4\cdots\cdots$④

由 ①+③，得 $6x+(a-1)z=3+b\cdots\cdots$⑤

(1)若 $a=7$，則由④與⑤，得知可能無限多組解或無解．

(2)若無解，則

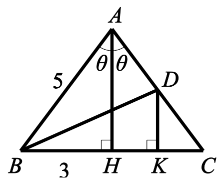
$\dfrac{2}{6}=\dfrac{2}{a-1}\neq\dfrac{4}{3+b}$，即 $a=7$ 且 $b\neq9$．

(3)若 $b\neq9$，則需再加上 $a=7$ 才是無解．

(4)若 $b=9$，則當 $a=7$ 時，聯立方程式有無限多組解．

(5)若 $a\neq7$，則 $\dfrac{2}{6}\neq\dfrac{2}{a-1}$．由④與⑤，得知恰一解，此時 b 的值不限制．

故選(2)(5)．

8. 

(1)因為 $\overline{AH}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，所以 $\sin\angle ABC=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\dfrac{4}{5}$.

(2)因為 $\angle BAC=2\theta$，所以

$\sin\angle BAC=2\sin\theta\cos\theta=2\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{24}{25}$.

(3)因為 $\overline{AH}\perp\overline{BC}$，所以 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

(4)因為 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overline{BH}\times\overline{BC}$， $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=\overline{BK}\times\overline{BC}$，

且 $\overline{BH}<\overline{BK}$，所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}<\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}$.

(5) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AH}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=\dfrac{1}{2}\times4\times5\times\left(-\dfrac{4}{5}\right)+0=-8$.

故選(3)(5) .

9. 由 L 的兩面式 $\begin{cases}x+2y+3z=6\\2x-3y-z=5\end{cases}$，

得 L 的參數式 $\begin{cases}x=4-t\\y=1-t\\z=t\end{cases}$ （ $t\in\mathbb{R}$ ）.

(1)因為將點 $(5,2,-1)$ 代入 L 的參數式，合，

所以在 L 上 .

(2)因為 $(1,2,-1)$ 與 $(-1,-1,1)$ 不平行，所以不是 .

(3)將點 $(4-t,1-t,t)$ 代入 $z=0$，

得 $t=0$，即與 xy 平面交於一點 $(4,1,0)$.

(4)將點 $(4-t,1-t,t)$ 代入 $x+y+2z=5$，得

$(4-t)+(1-t)+2t=5\Rightarrow0=0$，

為一恆等式 . 因此， L 落在平面 $x+y+2z=5$ 上 .

(5) y 軸： $\begin{cases}x=0\\y=s\\z=0\end{cases}$ （ $s\in\mathbb{R}$ ）.

因為聯立方程式 $\begin{cases}4-t=0\\1-t=s\\t=0\end{cases}$ 無解，

所以 L 與 y 軸不相交 .

又因為向量 $(0,1,0)$ 與 $(-1,-1,1)$ 不平行，

所以 L 與 y 軸不平行 .

因此， L 與 y 軸歪斜 .

故選(1)(3)(5) .

10. (1)原式 $=\frac{1}{2}\sin 36^\circ<\frac{1}{2}$ ．

(2)因為 $\sin 18^\circ>0$，且 $\cos 18^\circ>\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$，

所以 $\sin 18^\circ+\cos 18^\circ>\frac{1}{2}$ ．

(3)原式 $=\cos 36^\circ>\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ ．

(4)原式 $=\sin 9^\circ<\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ ．

(5)原式 $=\frac{1}{2}\tan 36^\circ<\frac{1}{2}\tan 45^\circ=\frac{1}{2}$ ．

故選(2)(3)．

11. (1)因為 B 有白白紅，白紅紅，紅白紅，紅紅紅共四種情形，所以

$$P(B)=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}+\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}+\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}+\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}$$
$$=\frac{4}{9}$$ ．

(2)因為 $A\cap B$ 有紅白紅，紅紅紅共二種情形，所以

$$P(A\cap B)=\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}+\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{1}{6}$$ ．

(3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}-\frac{1}{6}=\frac{13}{18}$$ ．

(4)因為 $P(A)=P(B)$，所以

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(B|A)$$ ．

(5)因為 $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$，

所以 A， B 不為獨立事件．

故選(1)(2)(4)．

12. 計算操作一輪後水量分布的情形：

乙瓶：$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a+b\right)=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b$，

丙瓶：$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c\right)=\frac{1}{8}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}c$，

甲瓶：$\frac{1}{2}a+\left(\frac{1}{8}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}c\right)=\frac{5}{8}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}c$，

得轉移矩陣
$$A=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}甲 & 乙 & 丙\end{array} \\ & \begin{bmatrix}\frac{5}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{array}{c}甲\\ 乙\\ 丙\end{array}\end{array}$$

(1) $p_{11}+p_{12}+p_{13}=\frac{5}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{11}{8}\neq 1$ ．

(2) $p_{11}+p_{21}+p_{31}=\frac{5}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1$ ．

(3) $p_{11}=\frac{5}{8}>\frac{1}{2}$ ．

(4)有一個元為 0 ．

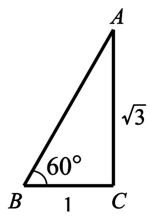
(5)因為 $\begin{bmatrix}a_2\\ b_2\\ c_2\end{bmatrix}=A^2\begin{bmatrix}8\\ 8\\ 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11\\ 6\\ 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{95}{8}\\ \frac{23}{4}\\ \frac{51}{8}\end{bmatrix}$，

所以 $c_2=\frac{51}{8}<7$ ．

故選(2)(3)．

A. 所求為 $2(1+3+\cdots+17)+19=2\times\frac{9(1+17)}{2}+19=181$．

B.



因為 $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$，且 $2\angle B=\angle A+\angle C$，

所以 $\angle B=60^\circ$ ．

由正弦定理，得

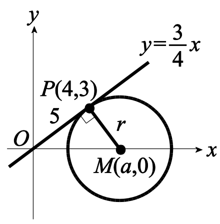
$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=\frac{1}{\sin A}\Rightarrow \sin A=\frac{1}{2}$$ ．

得 $\angle A=30^\circ$ 或 150°（不合，因為 $\angle A+\angle C=120^\circ$，即 $\angle A<120^\circ$）．

因此， $\angle C=180^\circ-60^\circ-30^\circ=90^\circ$，

故 $\triangle ABC$ 的面積為 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ．

C. 如下圖，其中圓心 $M(a,0)$ ．



由直線 PM 與切線垂直，及 $\triangle OPM$ 為直角三角形，可列得

$$\begin{cases}\frac{0-3}{a-4}\times\frac{3}{4}=-1\\ a^2=5^2+r^2\end{cases}$$ ．

解得 $a=\frac{25}{4}$， $r=\sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^2-5^2}=\frac{15}{4}$，

故 $a+r=10$ ．

D. 依題意可列得

$$3860+500+\left(500(1+x\%)+500(1+x\%)^2\right)\times 2\ge 7000\ .$$

整理得

$$25(1+x\%)+25(1+x\%)^2-66\ge 0\ ,$$

分解，得 $\left(5(1+x\%)-6\right)\left(5(1+x\%)+11\right)\ge 0$.

解得 $1+x\%\ge\frac{6}{5}$ 或 $1+x\%\le-\frac{11}{5}$ （不合）.

故 $x\%\ge\frac{1}{5}$ ，即 $x\ge 20$ ．故 x 的最小值為 20 ．

E. 因為迴歸直線 L 過點 $\left(\bar{x},\bar{y}\right)=(3,0.5)$，且斜率為

$$\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)}{\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}$$

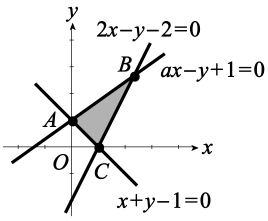
$$=\frac{(-2)(-0.1)+0+0+1\times 0.1+2\times(-0.1)}{4+1+0+1+4}=\frac{0.1}{10}=0.01\ ,$$

所以 $L: y-0.5=0.01(x-3)$，即 $y=0.01x+0.47$ ．

將 $x=6$ 代入 L ，得 $y=0.53$ ，故估計命中率為 0.53 ．

F. 解區域為下圖的三角形區域，其中三頂點為

$$A(0,1)\ ,\quad B\left(\frac{3}{2-a},\frac{2+2a}{2-a}\right),\quad C(1,0)\ .$$



因為 $\triangle ABC$ 的面積為 2 ，所以

$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\frac{3}{2-a} & \frac{3a}{2-a}\\ 1 & -1\end{vmatrix}\right|=2\Rightarrow\left|\frac{-3-3a}{2-a}\right|=4\ ,$$

即 $\frac{-3-3a}{2-a}=\pm 4$，解得 $a=\frac{5}{7}$ 或 11（不合）.

故 $a=\frac{5}{7}$ ．

G. 所求為不等式

$x_1+x_2+\cdots+x_6\le 15$，且 $x_1\ge 4$， $x_2\ge 3$

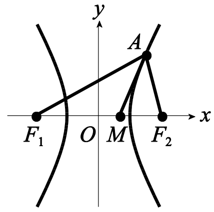
的正整數解個數．此個數就是方程式

$x_1+x_2+\cdots+x_6+y=16$ 且 $x_1\ge 4$， $x_2\ge 3$

的正整數解個數，為

$$H^{7}_{16-12}=H^{7}_{4}=C^{10}_{4}=210\ .$$

H.



因為 $a=3$， $c=\sqrt{9+27}=6$，所以 $\overline{AF_1}-\overline{AF_2}=2a=6$.

又因為 $\overline{AM}$ 為 $\angle F_1AF_2$ 的平分線，所以

$\overline{AF_1}:\overline{AF_2}=\overline{F_1M}:\overline{MF_2}=8:4=2:1$ ．

因此， $\overline{AF_1}=12$ ．