龍騰文化學科能力測驗全真模擬試卷

數學考科　解答卷

■答案

第壹部分：選擇題

一、單選題

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
5	3	3	2	4	2	4

二、多選題

8.	9.	10.	11.	12.	13.
135	134	25	145	124	1245

第貳部分：選填題

14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.
1	7	1	7	4	1	4	7	1	3	−	1	−	3	−	2

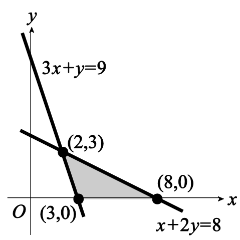
■解析

1. 令 $k=10^{3.41}$，則 $\log k=3.41=3+0.41$．

令 $\log b=0.41$，則 $\log k=3+\log b=\log(b\times 10^3)$，

即 $k=b\times 10^3$．由已知得知 b 接近 2.6，

故選(5)．



2. 將下圖中的三頂點代入 $ax+y$，得

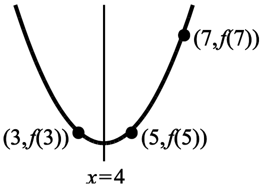
(x,y)	$(2,3)$	$(3,0)$	$(8,0)$
$ax+y$	$2a+3$	$3a$	$8a$

根據頂點法及 $2a+3$ 是唯一最大值，列得

$$\begin{cases}2a+3>3a\\2a+3>8a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<3\\a<\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow a<\frac{1}{2}\ .$$

又選項中僅 $\log_5 2=\dfrac{\log 2}{\log 5}<\dfrac{\log 2}{\log 4}=\dfrac{1}{2}$，

故選(3)．

3. 

因為 $f(3)=f(5)=8$， $f(7)=24$，

所以 $f(x)$ 的圖形是對稱軸為 $x=\frac{3+5}{2}=4$

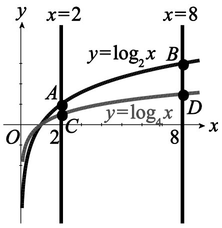
且開口向上的拋物線．又因為

$f(4)=8\times\frac{3}{8}+8\times\frac{3}{4}+24\times\left(-\frac{1}{8}\right)=6$，

所以拋物線的頂點坐標為 $(4,6)$，

即 $f(x)$ 的最小值為 6，

故選(3)．

4. 

因為 $A(2,1)$， $B(8,3)$，

所以 $\overleftrightarrow{AB}: y-1=\frac{1}{3}(x-2)$，即 $x-3y=-1$ ．

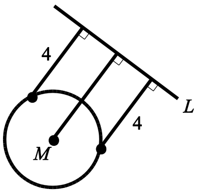
因為 $C\left(2,\frac{1}{2}\right)$， $D\left(8,\frac{3}{2}\right)$，

所以 $\overleftrightarrow{CD}: y-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}(x-2)$，即 $x-6y=-1$ ．

由 $\begin{cases}x-3y=-1\\x-6y=-1\end{cases}$，解得兩直線恰交一點 $(-1,0)$，

即此交點在 x 軸上．

故選(2)．

5. 

因為圓心 $M(-1,-2)$ 到直線 L 的距離為

$\frac{|-3-8-14|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{25}{5}=5$，

且半徑為 $\sqrt{5}$，所以圓上的點到 L 的距離 d 之範圍為

$5-\sqrt{5}\le d\le 5+\sqrt{5}$ ．

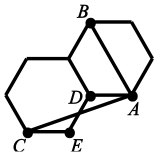
若 d 是整數，則 $d=3,4,5,6,7$ ．

又其中每一個整數距離都有 2 個點，

所以共有 $5\times2=10$ 個點．

故選(4)．

8794-A1 K

6. 

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EC}\right)$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EC}$

$=2\times1\times\cos60^\circ+2\times1\times\cos120^\circ+2\times1\times\cos60^\circ$

$=1+(-1)+1=1$ ．

故選(2)．

7. 因為 $\det(A)=\begin{vmatrix}-3 & b\\ a & 3\end{vmatrix}=-9-ab=\frac{1}{2}$，所以 $ab=-\frac{19}{2}$ ．

又因為 $A-A^{-1}=\begin{bmatrix}-3 & b\\ a & 3\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}3 & -b\\ -a & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9 & 3b\\ 3a & 9\end{bmatrix}$，

所以 $\det(A-A^{-1})$

$=\begin{vmatrix}-9 & 3b\\ 3a & 9\end{vmatrix}=-81-9ab=-81-9\times\left(-\frac{19}{2}\right)=\frac{9}{2}$ ．

故選(4)．

8. 令 $\angle BAC=\theta$，

(1) $\cos\angle PAB=\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta=-\frac{3}{5}$ ．

(2)利用餘弦定理，得

$\overline{PB}^2=4^2+5^2-2\times4\times5\times\cos(90^\circ+\theta)$

$=16+25-2\times4\times5\times\left(-\frac{3}{5}\right)\theta$ ，

即 $\overline{PB}=\sqrt{65}$.

(3) $\Delta APB=\frac{1}{2}\times4\times5\times\sin(90^\circ+\theta)$

$=10\times\cos\theta=\frac{4}{5}\times1$.

(4) $\Delta APQ=\frac{1}{2}\times4\times5\times\sin(180^\circ-\theta)$

$=10\times\sin\theta=\frac{3}{5}\times1$.

(5)仿照(4)的方法，可知四個三角形的面積都相等．

故選(1)(3)(5)．

9. (1)因為 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，

即 $(-2,2,1)\cdot(1,2,k-1)=0\Rightarrow -2+4+k-1=0$

$\Rightarrow k+1=0$ ．

解得 $k=-1$.

(2)外積 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=(-2,2,1)\times(1,2,-2)=(-6,-3,-6)$，

且 $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=\sqrt{36+9+36}=9$，$|\overrightarrow{AE}|=2\overline{AB}=6$ ．

因為 $\overrightarrow{AE}$ 與 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ 同向，且 $|\overrightarrow{AE}|=\dfrac{2}{3}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|$，

所以 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}(-6,-3,-6)=(-4,-2,-4)$.

因此， E 的坐標為 $(-3,-1,-3)$.

(3)因為 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=(-6,-3,-6)$與向量 $(2,1,2)$平行，

所以 $(2,1,2)$是底面的一個法向量．

(4)因為 $\triangle BED$ 為等腰三角形，且底邊中點為

$M\left(\dfrac{1}{2},3,\dfrac{1}{2}\right)$，所以 $\overline{EM}$ 平分 $\angle BED$.

又因為 $\overrightarrow{EM}=\left(\dfrac{7}{2},4,\dfrac{7}{2}\right)$與向量 $(7,8,7)$平行，所以

$(7,8,7)$ 是 $\angle BED$ 的角平分線的一個方向向量．

(5)因為 $\overline{EM}\perp\overline{BD}$ 且 $\overline{AM}\perp\overline{BD}$，所以 $\angle EMA=\theta$.

因為 $\triangle AME$ 為直角三角形，且 $\overline{AE}=6$，

$\overline{AM}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，所以 $\overline{EM}=\sqrt{6^2+\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$.

因此， $\cos\theta=\dfrac{\overline{AM}}{\overline{EM}}=\dfrac{1}{3}$.

故選(1)(3)(4)．

10. 因為兩方向向量 $\overrightarrow{v_1}=(1,2,3)$與 $\overrightarrow{v_2}=(1,-3,2)$不平行，

所以 L_1 與 L_2 不是交一點就是歪斜．

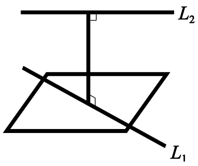
設交點為 $P(x,y,z)$.

因為 P 既在 L_1 也在 L_2 上，所以可列得

$$\begin{cases}3+t=2+s\\3+2t=-4-3s\\3t=5+2s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t-s=-1\cdots\cdots①\\2t+3s=-7\cdots\cdots②\\3t-2s=5\cdots\cdots③\end{cases}$$

由①②解得 $t=-2$， $s=-1$，代入③得 $-4=5$（不合），

因此， L_1 與 L_2 沒有交點，即 L_1 與 L_2 歪斜．



利用上圖，可推得選項(2)(5)正確．

11. (1)利用標準差的定義，得

$$\sqrt{\dfrac{(x_1-7)^2+(x_2-7)^2+\cdots+(x_{10}-7)^2}{10}}=\sqrt{\dfrac{f(7)}{10}}=3,$$

解得 $f(7)=90$.

(2)利用標準差的公式，得

$$\sqrt{\dfrac{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+\cdots+x_{10}^{\,2}}{10}-7^2}=3,$$

解得 $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+\cdots+x_{10}^{\,2}=(3^2+7^2)\times10=580$.

(3)因為二次函數

$$f(x)=(x_1-x)^2+(x_2-x)^2+\cdots+(x_{10}-x)^2$$
$$=10x^2-2x(x_1+x_2+\cdots+x_{10})$$
$$+(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+\cdots+x_{10}^{\,2})$$

在 $x=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{10}}{10}=7$ 有最小值，

所以 $f(6)>f(7)$.

(4)同(3)，得知 $f(7)<f(8)$.

(5)因為 $f(x)$ 的圖形是以 $x=7$ 為對稱軸的開口向上

拋物線，所以 $f(8)<f(9)$.

故選(1)(4)(5)．

12. (1)將方程式改寫為 $y^2=-8x+16$，

即 $(y-0)^2=4\cdot(-2)\cdot(x-2)$.

得知其圖形為頂點 $(2,0)$，焦點 $(0,0)$，

開口向左的拋物線．

(2)將方程式改寫為 $8(x^2+6x+9)-y^2=8$，

即 $\dfrac{(x+3)^2}{1}-\dfrac{y^2}{8}=1$，

因為 $a^2=1$， $b^2=8$，所以 $c=\sqrt{8+1}=3$.

得知其圖形為中心 $(-3,0)$，

焦點 $(-6,0)$ 及 $(0,0)$ 的雙曲線．

(3)由橢圓的定義 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$， $2a>\overline{F_1F_2}$，

得知其圖形為焦點 $(1,0)$ 及 $(-1,0)$， $2a=8$ 的橢圓．

(4)由雙曲線的定義 $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2a$， $0<2a<\overline{F_1F_2}$，

得知其圖形為焦點 $(-3,0)$ 及 $(0,0)$，

$2a=2$ 的雙曲線．

(5)將等式兩邊平方，得

$(x+1)^2=4((x-1)^2+y^2)\Rightarrow 3x^2-10x+4y^2+3=0$．

配方得 $3\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+4y^2=\frac{16}{3}\Rightarrow\frac{\left(x-\frac{5}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}}+\frac{y^2}{\frac{4}{3}}=1$，

得知其圖形為中心 $\left(\frac{5}{3},0\right)$，

$a=\frac{4}{3}$， $b=\frac{2}{\sqrt{3}}$， $c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{2}{3}$ 的橢圓．

因此，其兩焦點為 $(1,0)$， $\left(\frac{7}{3},0\right)$．

故選(1)(2)(4)．

13. (1)因為 $r=0.8>0$，所以正相關．

(2)迴歸直線 L 必通過點 $(\overline{X},\overline{Y})=(70,190)$．

(3) $m=r\cdot\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}=0.8\cdot\frac{5}{8}=0.5$．

(4)因為 $X'=2.54X, Y'=0.454Y$，且 $2.54\times0.454>0$，

所以 $r'=r=0.8$．

(5) $m'=r'\cdot\frac{\sigma_{Y'}}{\sigma_{X'}}=r\cdot\frac{0.454\sigma_Y}{2.54\sigma_X}=\frac{0.454}{2.54}\cdot m<m$．

故選(1)(2)(4)(5)．

A. 由題意可列得 $1\times2+2\times3+\cdots+n(n+1)=1938$．

又因為

左式 $=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$，

所以 $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}=1938\Rightarrow n(n+1)(n+2)=5814$．

又因為 $5814=17\times18\times19$，所以 $n=17$．

B. 由原式移項，得

$(x^2-x+1)(x+2)(x-2)^2(2x-11)$

$-(19x-4)(x+2)(x-2)^2(2x-11)\le0$．

提公因式，得

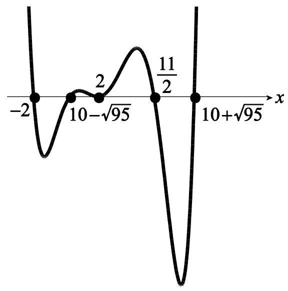
$(x^2-20x+5)(x+2)(x-2)^2(2x-11)\le0$．

分解，得

$(x-(10+\sqrt{95}))(x-(10-\sqrt{95}))$

$\times(x+2)(x-2)^2(2x-11)\le0$．

利用函數圖形



得不等式的解為

$-2\le x\le10-\sqrt{95}$ 或 $x=2$ 或 $\frac{11}{2}\le x\le10+\sqrt{95}$．

故所有整數解的總和為

$(-2)+(-1)+0+2+6+7+8+\cdots+19$

$=(-1)+\frac{14\times(6+19)}{2}=174$．

C. 設寫作外的 5 考科中，成績為 A， B， C 的考科各有 x_1， x_2， x_3 科，則 $x_1+x_2+x_3=5$．

其非負整數解有 $C_5^{3+5-1}=C_5^7=21$（組）．

又寫作成績有 0 ～ 6 級分 7 種，根據乘法原理，

最多有 $21\times7=147$ 種不同的成績．

D. 因為不公正硬幣出現正反面的機率分別為 $\frac{2}{3}$ 與 $\frac{1}{3}$，

所以 P(公正是正面|一正一反)

$=\frac{P(\text{一正一反}\cap\text{公正是正面})}{P(\text{一正一反})}$

$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}$．

E. 因為 $\overline{AE}$ 平分 $\angle BAC$，所以 $\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}=3:2$．

因此， $\Delta ABD:\Delta ACD=\overline{BD}:\overline{DC}=3:2$．

令 $\Delta ABD=3k$， $\Delta ACD=2k$，

則 $\Delta ABE=3\times\Delta ABC=3\times(3k+2k)=15k$，

即 $\Delta BDE=15k-3k=12k$．

因此， $\overline{AD}:\overline{DE}=\Delta ABD:\Delta BDE=3k:12k=1:4$．

故 $\overrightarrow{AE}=5\overrightarrow{AD}=5\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}\right)=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$，

則 $r=2$， $s=3$，即 $r-s=-1$．

F. 由原不等式，得

$\log_2(|2x-1|+|5x-2|)\le\log_2 8\Rightarrow|2x-1|+|5x-2|\le 8$.

依 x 的範圍分三段討論如下：

①當 $x\ge\frac{1}{2}$ 時，$(2x-1)+(5x-2)\le 8\Rightarrow 7x-3\le 8$

$\Rightarrow x\le\frac{11}{7}$，即 $\frac{1}{2}\le x\le\frac{11}{7}$.

②當 $\frac{2}{5}\le x\le\frac{1}{2}$ 時，$-(2x-1)+(5x-2)\le 8\Rightarrow 3x-1\le 8$

$\Rightarrow x\le 3$，即 $\frac{2}{5}\le x\le\frac{1}{2}$.

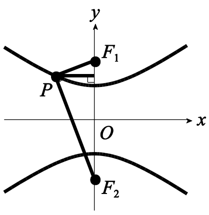
③當 $x\le\frac{2}{5}$ 時，$-(2x-1)-(5x-2)\le 8\Rightarrow -7x+3\le 8$

$\Rightarrow x\ge-\frac{5}{7}$，即 $-\frac{5}{7}\le x\le\frac{2}{5}$.

由①②③取聯集，得 $-\frac{5}{7}\le x\le\frac{11}{7}$，則 $a=-\frac{5}{7}$，$b=\frac{11}{7}$，

即 $2a-b=2\times(-\frac{5}{7})-\frac{11}{7}=-3$.

G.



雙曲線 $\Gamma:-\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 的

$a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{6}$，$c=\sqrt{3+6}=3$.

由雙曲線的定義，得知 $\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=-2\sqrt{3}$.

令 $\overline{PF_1}=k$，則 $\overline{PF_2}=k+2\sqrt{3}$.

因為 $\angle F_1PF_2=90°$，所以利用畢式定理，

得 $k^2+(k+2\sqrt{3})^2=6^2\Rightarrow k^2+2\sqrt{3}k-12=0$.

解得 $k=-\sqrt{3}\pm\sqrt{15}$（負不合），

即 $\overline{PF_1}=\sqrt{15}-\sqrt{3}$，$\overline{PF_2}=\sqrt{15}+\sqrt{3}$.

因此，$\triangle PF_1F_2$ 斜邊上的高為

$\frac{(\sqrt{15}-\sqrt{3})(\sqrt{15}+\sqrt{3})}{6}=\frac{15-3}{6}=2$，

故 P 點的 x 坐標為 -2 .