龍騰文化學科能力測驗全真模擬試卷

數學考科　解答卷

■答案

第壹部分：選擇題

一、單選題

1.	2.	3.	4.	5.	6.
2	1	4	4	2	4

二、多選題

7.	8.	9.	10.	11.	12.
134	124	15	245	5	1345

第貳部分：選填題

13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.	31.	32.
1	2	5	8	1	5	0	−	3	1	2	2	1	−	4	3	1	9	4	4

■解析

1. 因為 E_1 與 E_2 互相垂直，所以

$(2,0,-1)\cdot(1,2,k)=0 \Rightarrow 2+0-k=0 \Rightarrow k=2$ ．

因此，原點到 E_1 的距離與到 E_2 的距離分別為

$d_1=\dfrac{|-5|}{\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$；

$d_2=\dfrac{|-3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{3}{3}=1$ ．

得比值為 $\dfrac{d_1}{d_2}=\sqrt{5}$，故選(2)．

2. 分二類：

(1) 傘數中有 0： 有 $C_2^5\times 1=10$ 個．

(2) 傘數中無 0： 有 $C_3^5\times 2!=20$ 個．

共 $10+20=30$ 個，故選(1)．

3. 令 $f(x)=(x+1)(x^2-x+1)-29$ ．

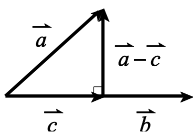
計算函數值：

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	−28	−27	−20	−1	36

根據勘根定理，因為 $f(3)f(4)<0$，所以 $3<\alpha<4$ ．

故選(4)．

4.



由題意，推得 $\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}\right)\perp\overrightarrow{c}$ ．因此

$(4,k+1,-4)\cdot(3,-1,1)=0\Rightarrow 7-k=0$，

解得 $k=7$，故選(4)．

5. 設 $P(x,y)$ ．因為 $\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=4$，所以

$\left(\sqrt{(x+1)^2+y^2}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+(y-1)^2}\right)^2=4$

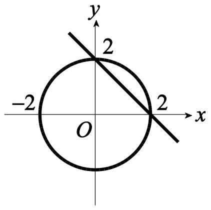
$\Rightarrow(x^2+2x+1+y^2)-(x^2+y^2-2y+1)=4$

$\Rightarrow x+y=2$.

即 P 點在直線 $x+y=2$ 上．

因為直線 $x+y=2$ 與圓 $x^2+y^2=4$ 有兩個交點，

如圖所示，



所以滿足條件的 P 點有 2 個．故選(2)．

6. 依題意及 $(BA)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$，得 $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}B^{-1}=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$.

因此

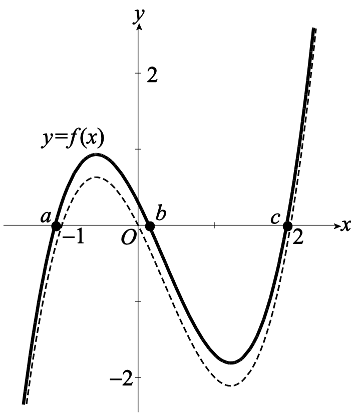
$$B^{-1}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}4&-2\\-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&1\\3&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

得 $B=\left(B^{-1}\right)^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-1\\-3&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&1\\3&4\end{bmatrix}$，

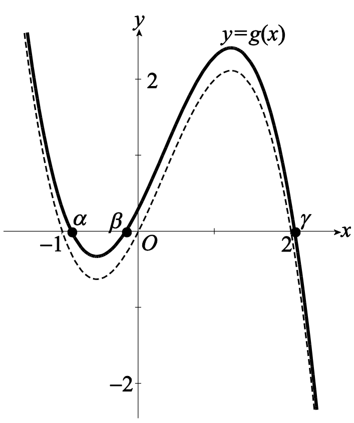
即 4 個元的總和為 $\frac{1}{2}+1+3+4=\frac{17}{2}$ ．故選(4)．

7. 將 $y=x(x+1)(x-2)$ 與 $y=-x(x+1)(x-2)$ 的圖形分別向上平移 0.01 單位，

可得 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 的圖形，如下圖所示．



虛線為 $y=x(x+1)(x-2)$ 的圖形



虛線為 $y=-x(x+1)(x-2)$ 的圖形

(1) 由 $y=f(x)$ 的圖知 $a+b+c>0$ ．

(2) 因為 a,b,c 是二正數一負數，所以 $abc<0$ ．

(3) 由 $y=g(x)$ 的圖知此選項正確．

(4) 因為 α,β,γ 中僅 γ 為正，所以恰一正根．

(5) 由圖知 a,b,c 與 α,β,γ 不相同．

故選(1)(3)(4)．

8. 設公差為 d ．因為 $S_3=a_4+6$，所以

$a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)=(a_1+3d)+6\Rightarrow a_1=3$ ．

又因為 a_1,a_4,a_{13} 成等比數列，所以 $a_4{}^2=a_1\times a_{13}$，即

$(3+3d)^2=3(3+12d)\Rightarrow d^2-2d=0$，

解得 $d=2$ 或 0（不合）．

(1) $a_3=a_1+2d=7$ ．

(2) 因為 $a_n=a_1+(n-1)d=3+(n-1)\times 2=2n+1$，

所以 a_n 為奇數．

(3) $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(3+(2n+1))}{2}=n(n+2)=n^2+2n$ ．

(4) $\sum_{n=1}^{20}S_n=\sum_{n=1}^{20}(n^2+2n)=\sum_{n=1}^{20}n^2+2\sum_{n=1}^{20}n$

$=\frac{20(20+1)(40+1)}{6}+2\times\frac{20(20+1)}{2}=3290$ ．

(5) $\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{S_n}=\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\cdots+\frac{1}{20\times 22}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{20}-\frac{1}{22}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{21}-\frac{1}{22}\right)<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$ ．

故選(1)(2)(4)．

9. (1) 代公式 $m=r\times\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$，得 $\frac{3}{2}=0.75\times\frac{\sigma_y}{4}\Rightarrow\sigma_y=8$ ．

(2) 因為 $x'=\frac{5}{4}x$，所以 $\sigma_{x'}=\frac{5}{4}\sigma_x=5$ ．

(3) 因為 $x'=\frac{5}{4}x$， $y'=y$，所以 $r'=r=0.75$ ．

(4) $m'=r'\times\frac{\sigma_{y'}}{\sigma_{x'}}=0.75\times\frac{8}{5}=\frac{6}{5}<\frac{3}{2}$ ．

(5) 因為點 (x,x') 都落在斜率為 $\frac{5}{4}$（正）的直線

$x'=\frac{5}{4}x$ 上，

所以此兩資料為完全正相關，即相關係數為 1 ．

故選(1)(5)．

10. 設原點到直線 L 的距離為 d．由圖 1，得

弦長 $=2\sqrt{25-d^2}$．

因為弦長小於 8，且 $0\le d<5$，所以

$2\sqrt{25-d^2}<8\Rightarrow 25-d^2<16\Rightarrow 3<d<5$，

因此，如圖 2（內圓為 $x^2+y^2=9$，外圓為 $x^2+y^2=25$），只要是不碰內圓且通過圖中環狀區的非切線 L，皆滿足條件．

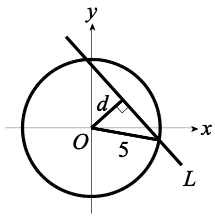


圖 1

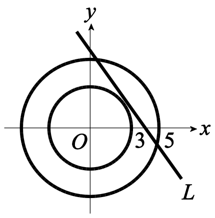


圖 2

將 5 個選項的圖形一一畫在圖 2，

即可判定選項(2)(4)(5)正確．

11. (1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta=3\times2\times\cos\theta=6\cos\theta\ge-6$．

(2) 因為 $(2,-1,-2)\cdot(3,2,1)=2\neq0$，

這與「$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 垂直」矛盾，所以不可能．

(3) 因為 $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta=6\sin\theta\le6$，但

$|(5,-4,7)|=\sqrt{5^2+(-4)^2+7^2}=3\sqrt{10}>6$，

所以不可能．

(4) 因為 $|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}||\cos\theta|=6|\cos\theta|=4$，

即 $\cos\theta=\pm\frac{2}{3}$，

所以 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 不平行．因此，$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 不是 $\overrightarrow{0}$．

(5) 因為 $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta=6\sin\theta=6$，

即 $\sin\theta=1$，

所以 $\theta=90^\circ$，即 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 垂直．

因此，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$．

故選(5)．

12. (1) $a_{20}=1+2+\cdots+20=\frac{20(20+1)}{2}=210$．

(2)因為 $a_k=1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$，所以

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10(10+1)(20+1)}{6}+\frac{10(10+1)}{2}\right)$$

$$=220$$．

(3) 因為當 n 是 5 的倍數或被 5 除餘 4 時，

a_n 為 5 的倍數，所以

$b_1=a_4$，$b_2=a_5$，$b_3=a_9$，$b_4=a_{10}=55$，

(4) $b_{40}=b_{2\times20}=a_{5\times20}=a_{100}$．

(5) $b_{99}=b_{2\times50-1}=a_{5\times50-1}=a_{249}$．

故選(1)(3)(4)(5)．

A. 令 $y-\left(\frac{1}{2}\right)^x=k$，即 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x+k$．

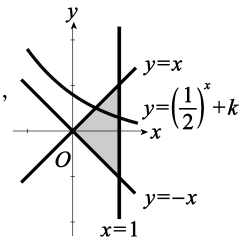
其圖形為 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的圖形向上平移 k 單位．

由右圖得知，

當通過可行解區域的頂點 $(1,1)$ 時，

k 有最大值，

且最大值為 $1-\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$．



B. 因為樣本空間的個數 $n(S)=4\times4=16$，且「心有靈犀」的情形有

$(甲,乙)=(3,3),(3,4),$

$(4,3),(4,4),(4,5),$

$(5,4),(5,5),(5,6),$

$(6,5),(6,6)$．

共 $2+3+3+2=10$ 種，所以 $P=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$．

C. 令 $\log_4 a=\log_8 b=\log_{16}(5a+4b)=k$，則

$a=4^k$，$b=8^k$，$5a+4b=16^k$．

設 $x=2^k$．因為 $5\times4^k+4\times8^k=16^k$，所以

$5x^2+4x^3=x^4\Rightarrow x^2(x^2-4x-5)=0\Rightarrow x^2(x+1)(x-5)=0$，

解得 $x=0,-1,5$．因為 $x>0$，所以 $x=2^k=5$，因此

$a=5^2=25$，$b=5^3=125$，

故 $a+b=150$．

D. 因為焦點相同，所以橢圓與雙曲線的 c 相等，即

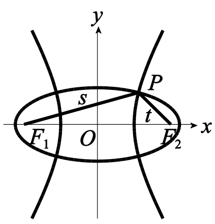
$c=\sqrt{m-1}=\sqrt{n+3}$，

得 $m=n+4$．

令 $s=\overline{PF_1}$，$t=\overline{PF_2}$ 且 $s>t$，

利用橢圓與雙曲線的定義，得

$\begin{cases}s+t=2\sqrt{m}\\ s-t=2\sqrt{n}\end{cases}\Rightarrow s=\sqrt{m}+\sqrt{n}$，$t=\sqrt{m}-\sqrt{n}$．



再利用餘弦定理，得

$$\cos\angle F_1PF_2=\frac{s^2+t^2-(2c)^2}{2st}$$

$$=\frac{\left(m+2\sqrt{mn}+n\right)+\left(m-2\sqrt{mn}+n\right)-4\left(n+3\right)}{2\left(m-n\right)}$$

$$=\frac{2m+2n-4\left(n+3\right)}{2\times 4}$$

$$=\frac{2\left(n+4\right)+2n-4\left(n+3\right)}{8}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2},$$

得 $\angle F_1PF_2=120^\circ$，故 $\tan\angle F_1PF_2=-\sqrt{3}$.

E. 因為 $\angle AEF$ 為鈍角，所以

$$\cos\angle AEF=\frac{\left(\sqrt{x^2+2^2}\right)^2+\left(\sqrt{(3-x)^2+1^2}\right)^2-\left(\sqrt{10}\right)^2}{2\sqrt{x^2+2^2}\times\sqrt{(3-x)^2+1^2}}<0$$

$\Rightarrow\left(x^2+4\right)+\left(10-6x+x^2\right)-10<0$

$\Rightarrow x^2-3x+2<0$

$\Rightarrow(x-1)(x-2)<0$

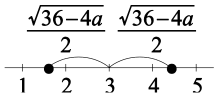
解得 $1<x<2$.

F. 二次不等式的解為

$\dfrac{6-\sqrt{36-4a}}{2}\le x\le\dfrac{6+\sqrt{36-4a}}{2}$

$\Rightarrow 3-\dfrac{\sqrt{36-4a}}{2}\le x\le 3+\dfrac{\sqrt{36-4a}}{2}$,

因為恰 3 個整數解，所以



$1\le\dfrac{\sqrt{36-4a}}{2}<2$

$\Rightarrow 2\le\sqrt{36-4a}<4$

$\Rightarrow 4\le 36-4a<16$

$\Rightarrow 5<a\le 8$.

又因為 a 為整數，所以 $a=6,7,8$，其總和為 21 .

G. 令 $\overline{AB}=\overline{AC}=k$.因為 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=-\dfrac{1}{2}$，所以

$\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow-k\times k\times\dfrac{k^2+k^2-2^2}{2\times k\times k}+\dfrac{1}{2}k^2=-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\dfrac{-2k^2+4}{2}+\dfrac{1}{2}k^2=-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow-k^2+4=-1$

$\Rightarrow k=\sqrt{5}$.

因此，

$$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$$

$$=-\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\frac{\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2-2^2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}+\frac{1}{3}\left(\sqrt{5}\right)^2$$

$$=-3+\frac{5}{3}=\frac{-4}{3}.$$

H. 設矩形休閒廣場的長、寬分別為 x,y 公尺，

則 $xy=2400$.

兩塊矩形綠地的總面積為

$(x-6)(y-4)=xy-4x-6y+24=2424-2(2x+3y)$.

利用算幾不等式，得

$\dfrac{2x+3y}{2}\ge\sqrt{6xy}=120\Rightarrow 2x+3y\ge 240$.

得知當 $2x=3y=120$，即 $x=60$， $y=40$ 時，

$2x+3y$ 有最小值 240 .

故兩塊矩形綠地的總面積有最大值

$2424-2\times 240=1944$

平方公尺 .