龍騰文化學科能力測驗全真模擬試卷

數學考科　解答卷

■答案

第壹部分：選擇題

一、單選題

1.	2.	3.	4.	5.	6.
4	1	2	1	1	4

二、多選題

7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
23	234	24	25	135	15	13

第貳部分：選填題

14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.
2	1	3	4	2	1	1	1	2	8	4	2	2	4	3

■解析

1. 利用公式 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|}$，得

(1) $\cos\theta_1=\dfrac{59}{5\sqrt{194}}$.

(2) $\cos\theta_2=\dfrac{5}{5\sqrt{194}}$.

(3) $\cos\theta_3=\dfrac{-5}{5\sqrt{194}}$.

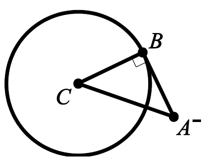
(4) $\cos\theta_4=\dfrac{-59}{5\sqrt{194}}$.

(5) $\cos\theta_5=\dfrac{-5}{5\sqrt{194}}$.

餘弦值最小者夾角最大，故選(4) .

2. 由 $C:x^2+(y-2)^2=5$，得圓心 $C(0,2)$，半徑 $r=\sqrt{5}$，

因為 $\overline{AC}=\sqrt{10}$，



所以 $\triangle ABC$ 為等腰直角三角形，

所以 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{10}\times\sqrt{5}\times\cos135^\circ$

$=5\sqrt{2}\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=-5$，

故選(1) .

3. 甲乙先選一站有 $C^3_1=3$（種），

丙丁分入另二站有 $2!=2$（種），

最後 2 人再分入有 $2!=2$（種），

利用乘法原理，共 $3\times2\times2=12$（種），故選(2) .

4. 因為 $\log a_n=\log\left(\dfrac{\sqrt{10}}{100}\right)^3+\log a_{n-1}$

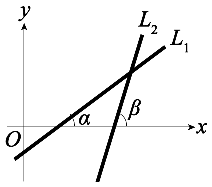
$\Rightarrow b_n=3\left(\log\sqrt{10}-\log100\right)+b_{n-1}$，

所以 $b_n=-\dfrac{9}{2}+b_{n-1}$，得 $b_1=\log\sqrt{10}=\dfrac{1}{2}$，

$b_2=-\frac{9}{2}+b_1=-4$， $b_3=-\frac{9}{2}+b_2=-\frac{17}{2}$，

即 $b_1+b_2+b_3=-12$，故選(1)．

5. 如圖，



設直線 L_1 與 L_2 與 x 軸正向的夾角為 α， β，

則 $\tan\alpha=\frac{1}{k}$， $\tan\beta=2k$，

因為三線圍成等腰三角形，所以 $\beta=2\alpha$ ．

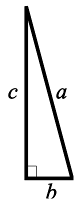
因此， $\tan\beta=\tan 2\alpha$，

即 $2k=\dfrac{2\times\frac{1}{k}}{1-\left(\frac{1}{k}\right)^2}\Rightarrow 2k=\dfrac{2k}{k^2-1}$，

得 $2k^3-2k=2k\Rightarrow k\left(k^2-2\right)=0\Rightarrow k=0$， $\pm\sqrt{2}$，

因為 $k>1$，所以 $k=\sqrt{2}$，故選(1)．

6. 比值 $=\dfrac{\left(\frac{1}{2}a\right)^2\pi}{\frac{1}{2}bc}=\dfrac{a^2\pi}{2bc}$



$=\dfrac{a^2\pi}{2\times a\sin 15^\circ\times a\cos 15^\circ}$

$=\dfrac{\pi}{\sin 30^\circ}=2\pi$，

故選(4)．

7. (1) ×，如直線 $y=x+\sqrt{2}$ 不經過任何格子點．

(2) ○，如直線 $y=\sqrt{2}x-\sqrt{2}$ 恰經過 $(1,0)$ 一個格子點．

(3) ○，想像在方格紙上連接兩格子點．
若是水平或鉛直線，則顯然成立；
若不是，則為方格紙中一矩形的對角線，
它必然會經過無窮多個格子點．

(4) ×，如直線 $y=x+\frac{1}{2}$ 不經過任何格子點．

(5) ×，如直線 $y=\sqrt{2}x-\sqrt{2}$ 經過格子點 $(1,0)$ ．

故選(2)(3)．

8. (1) ×，因為 $a\times 0+b\times 0+c\times 0\neq 3$，
所以原點不在 E 上．

(2) ○，因為兩法向量內積 $(0,b,c)\cdot(1,0,0)=0$，
所以 E 與 yz 平面垂直．

(3) ○，因為兩法向量 $(0,0,c)$ 與 $(0,0,1)$ 平行，
所以 E 與 xy 平面平行．

(4) ○，因為兩向量內積 $(a,0,c)\cdot(0,1,0)=0$，
且 y 軸上的點 $(0,0,0)$ 不在 E 上，
所以 E 與 y 軸平行．

(5) ×，因為兩向量 $(a,0,0)$ 與 $(0,1,0)$ 不平行，
所以 E 與 y 軸不垂直．

故選(2)(3)(4)．

9. 利用算幾不等式，得 $x+\frac{2}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}=2\sqrt{2}$，

得 $f(x)$ 有最小值 $2\sqrt{2}$，此時 $x=\frac{2}{x}\Rightarrow x=\sqrt{2}$，

即 $a=\sqrt{2}$， $b=2\sqrt{2}$ ．

$x^2+\frac{2}{x^2}\geq 2\sqrt{x^2\cdot\frac{2}{x^2}}=2\sqrt{2}$，

得 $g(x)$ 有最小值 $\sqrt{2\sqrt{2}}=2^{\frac{3}{4}}$，

此時 $x^2=\frac{2}{x^2}\Rightarrow x=2^{\frac{1}{4}}$，

即 $c=2^{\frac{1}{4}}$， $d=2^{\frac{3}{4}}$ ．

得知(1)×．(2)○．(3)×．

(4) ○，因為 $\log_a b=\log_{\sqrt{2}}2\sqrt{2}=3$， $\log_c d=3$，
所以 $\log_a b=\log_c d$ ．

(5) ×，因為 $a\neq c$，即兩函數不同時有最小值，
所以此選項錯誤．

故選(2)(4)．

10. (1) ×，要整係數才正確．

(2) ○，因為 $2+i$ 為方程式 $f(x)=5$ 的一根，
所以 $2-i$ 也是一根．

(3) ×，因為虛根成對，所以可能有兩組共軛虛根．

(4) ×，因為 $f(x)=x^5$ 為實係數五次（奇次）方程式，
所以至少一實根．

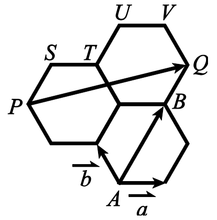
(5) ○，因為 $f(x)$ 的最高次項為正，且為偶數次，
所以存在足夠大的正數 k 使得
$f(k)>0$， $f(-k)>0$，
因為滿足 $f(2)\times f(k)<0$， $f(-k)\times f(1)<0$，
所以在區間 $(2,k)$ 與 $(-k,1)$ 各至少一實根．

故選(2)(5)．

11. (1) ○， $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{ST}+\overrightarrow{TU}+\overrightarrow{UV}+\overrightarrow{VQ}$

$=\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)+\overrightarrow{a}+\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)+\overrightarrow{a}+\left(-\overrightarrow{b}\right)$

$=4\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$.



(2) ×，因為 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=2\times2\times\cos120^\circ=-2$，

所以 $\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2=\left|4\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|^2$

$=16\times2^2+8\times(-2)+2^2=52$，

即 $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$.

(3) ○，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(4\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\right)$

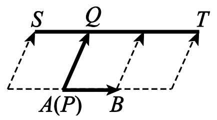
$=8\times2^2+10\times(-2)+2\times2^2=20$.

(4) ×，$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|}$

$=\dfrac{20}{2\sqrt{13}\times4}=\dfrac{5}{2\sqrt{13}}=\dfrac{5\sqrt{13}}{26}>\dfrac{15}{26}$.

(5) ○，將 $\overrightarrow{PQ}$ 平移使 P 與 A 重合，

如右圖，



因為 $-1\le t\le2$，

所以長度為 $\overline{ST}=3\overline{AB}=12$.

故選(1)(3)(5) .

12. (1) ○，依題意，可得 $\begin{bmatrix}p_{n+1}\\q_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5&0.7\\0.5&0.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_n\\q_n\end{bmatrix}$，

即 $A=\begin{bmatrix}0.5&0.7\\0.5&0.3\end{bmatrix}$.

(2) ×，因為 $X_{n+2}=AX_{n+1}=A(AX_n)=A^2X_n$，

所以 $B=A^2$

$=\begin{bmatrix}0.5&0.7\\0.5&0.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5&0.7\\0.5&0.3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6&0.56\\0.4&0.44\end{bmatrix}$.

(3) ×，因為 $X_{n+1}=AX_n$，所以 $A^{-1}X_{n+1}=X_n$，

即 $C=A^{-1}=\dfrac{1}{-0.2}\begin{bmatrix}0.3&-0.7\\-0.5&0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1.5&3.5\\2.5&-2.5\end{bmatrix}$.

(4) ×，因為 $q_n=1-p_n$，

所以 $p_{n+1}=0.5p_n+0.7q_n=0.5p_n+0.7(1-p_n)$

$=0.7-0.2p_n$.

(5) ○，因為 $p_{n+1}-\dfrac{7}{12}=0.7-0.2p_n-\dfrac{7}{12}$

$=\dfrac{7}{60}-0.2p_n=-\dfrac{1}{5}\left(p_n-\dfrac{7}{12}\right)$，

所以 $\left\langle p_n-\dfrac{7}{12}\right\rangle$ 是公比為 $-\dfrac{1}{5}$ 的等比數列 .

故選(1)(5) .

13. (1) ○，因為 $\mu_Z=0.8\mu_X+20$（$0<\mu_X<100$），

$\mu_W=1\quad\mu_Y$（$0<\mu_Y<100$），

所以 $\mu_Z>\mu_X$ 且 $\mu_W>\mu_Y$.

(2) ×，$\sigma_Z=0.8\times\sigma_X<\sigma_X$，即變小 .

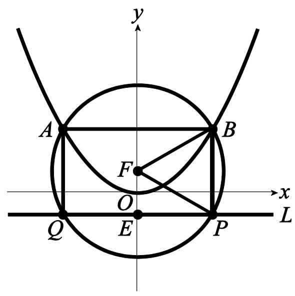
(3) ○，因為 $0.8\times1.5>0$，所以 $r_{(Z,W)}=r_{(X,Y)}=0.75$.

(4) ×，因為 $Z=0.8X+20$的散布圖是一條斜率為正的直線，所以 $r_{(Z,X)}=1$.

(5) ×，斜率為 $r_{(X,Y)}\times\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}=0.75\times\dfrac{6}{9}=0.5<1$.

故選(1)(3) .

A.



設圓 C 的半徑為 r，

由 $\Gamma:x^2=4\times\dfrac{1}{2}y$ 得知 $F\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，準線 $L:y=-\dfrac{1}{2}$，

根據拋物線的定義，得 $\overline{BP}=\overline{BF}$，

又 $\overline{BF}=\overline{PF}=r$，所以 $\triangle BFP$ 是邊長為 r 的正三角形，

因此 $\angle FPE=90^\circ-60^\circ=30^\circ$，

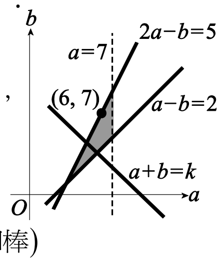
在直角三角形 FEP 中，

因為 $\overline{FE}=1$，所以斜邊 $\overline{PF}=r=2$.

B. 令 $a+b=k$，可行解區域如右圖，

利用平行線法，得知在點 $(6,7)$ 時，

k 有最大值13 .



C. (甲不跑第一棒)且(乙不跑第四棒)

=(任意)−(甲跑第一棒或乙跑第四棒)

$=C^6_4\times4!-\left(C^5_3\times3!+C^5_3\times3!-C^4_2\times2!\right)$

$=360-(60+60-12)=252$，

(甲跑第二棒)且(乙不跑第四棒)

=(甲跑第二棒)−(甲跑第二棒且乙跑第四棒)

$=C_3^5\times 3!-C_2^4\times 2!=48$，

故機率為 $\dfrac{48}{252}=\dfrac{4}{21}$ ．

D. 有一球是5號球且三球皆不連號，

另二球有三種情形：

(1) 一球比5大一球比5小：有 $C_1^3\times C_1^3=9$ 種．

(2) 二球皆比5小：有1，3號1種．

(3) 二球皆比5大：有7，9號1種．

共有 $9+1+1=11$ 種，

故機率為

$P(\text{三球皆不連號}|\text{有一球是5號球})=\dfrac{11}{C_2^8}=\dfrac{11}{28}$ ．

E. $f(x)+g(x)=3(x-\log 24)(x-\log a)$

$+(x-\log a)(x+\log 54)$

$=(x-\log a)\left[3(x-\log 24)+(x+\log 54)\right]$

$=(x-\log a)\left[4x-(3\log 24-\log 54)\right]$

$=(x-\log a)(4x-8\log 2)$

$=4(x-\log a)(x-2\log 2)$，

因為圖形與 x 軸恰交於一點，

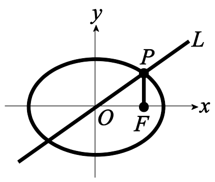
所以 $\log a=2\log 2$，解得 $a=4$ ．

F. 因為橢圓 Γ 的 $c=\sqrt{16-k^2}$，

所以 $F\left(\sqrt{16-k^2},0\right)$，

又因為 P 在直線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$ 上，

所以 $P\left(\sqrt{16-k^2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{16-k^2}\right)$，



將 P 代入 Γ，得 $\dfrac{16-k^2}{16}+\dfrac{16-k^2}{2k^2}=1$

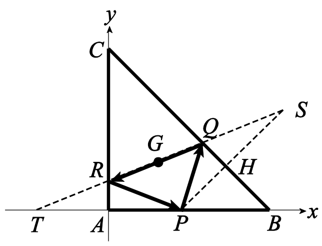
$\Rightarrow k^2\left(16-k^2\right)+8\left(16-k^2\right)=16k^2$，

整理得 $k^4+8k^2-128=0\Rightarrow\left(k^2-8\right)\left(k^2+16\right)=0$，

解得 $k^2=8$ 或 -16（不合），故 $k=2\sqrt{2}$ ．

G. 定坐標，$A(0,0)$，$B(4,0)$，$C(0,4)$，得重心 $G\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right)$，

如下圖．



設 $P(t,0)$，$0<t<4$，

P 關於直線 BC 的對稱點為 S，

P 關於 y 軸的對稱點為 T ．

由光學性質得知，$\overline{QR}$ 在直線 ST 上．

解 $\begin{cases}\overleftrightarrow{BC}: y=-x+4\\ \overleftrightarrow{PS}: y=x-t\end{cases}$，得 $H\left(\dfrac{4+t}{2},\dfrac{4-t}{2}\right)$，

再由 H 為 $\overline{PS}$ 的中點，得 $S(4,4-t)$，

又由 A 為 $\overline{TP}$ 的中點，得 $T(-t,0)$ ．

因為 S，G，T 三點共線，所以

$\overrightarrow{ST}=(-t-4,-4+t)\,//\,\overrightarrow{TG}=\left(\dfrac{4}{3}+t,\dfrac{4}{3}\right)$

$\Rightarrow\dfrac{-t-4}{\dfrac{4}{3}+t}=\dfrac{-4+t}{\dfrac{4}{3}}\Rightarrow t^2-\dfrac{4}{3}t=0$，

解得 $t=\dfrac{4}{3}$ 或0（不合），故 $\overline{AP}=\dfrac{4}{3}$ ．