龍騰文化指定科目考試模擬試卷

數學乙考科　解答卷

■答案

第壹部分：

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
4	5	5	2	125	135	1	3	5	1	1	5	1	0	6	6	1	2

第貳部分：

一.(1)	一.(2)	二.(1)	二.(2)
$\begin{cases}5x+3y\le 150\\5x+9y\le 180\\x\ge 0\\y\ge 0\end{cases}$	給甲店 27 公斤，乙店 5 公斤，才能獲得最大利潤 266 元	$f(x)=-2t^2+10t-12$	$x=4\sqrt{2}$ 時，$f(x)$ 有最大值 $\frac{1}{2}$

■解析

1. 由有理根判定法，
   得知有理根只可能是 1，-1，$\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$．
   又因為方程式的係數皆為正數，
   所以方程式不會有正根．
   因此，兩個相異的有理根為 -1 與 $-\frac{1}{2}$．
   代入方程式，列得 $\begin{cases}2-a+b-3+1=0\\\frac{1}{8}-\frac{a}{8}+\frac{b}{4}-\frac{3}{2}+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-b=0\\a-2b=-3\end{cases}$．
   解得 $a=3$，$b=3$，即 $a+b=6$．
   故選(4)．

2. $P(\text{第一關淘汰}|\text{淘汰})=\dfrac{P(\text{淘汰}\cap\text{第一關淘汰})}{P(\text{淘汰})}$
   $=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}}=\dfrac{12}{23}\approx 0.52$．
   故選(5)．

3. $L_1: y=-\frac{a}{b}x+\frac{k_1}{b}$，$L_2: y=-\frac{a}{b}x+\frac{k_2}{b}$．
   由斜率為負、y 截距大小及斜線區含原點，得
   $\begin{cases}-\frac{a}{b}<0\\\frac{k_1}{b}>\frac{k_2}{b}>0\\a\times 0+b\times 0\ge k_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<0\\b<0\\k_1<k_2<0\end{cases}$．
   故選(5)．

4. (1)因為迴歸直線過點 $(\overline{X},\overline{Y})=(65,70)$ 及 $(5,46)$，
   所以其斜率為 $\frac{70-46}{65-5}=\frac{24}{60}=0.4$．
   (2)由迴歸直線斜率為 $r\cdot\frac{S_Y}{S_X}$，
   得 $0.4=0.8\times\frac{S_Y}{S_X}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{S_Y}{S_X}\Rightarrow S_Y=\frac{1}{2}S_X$，
   又因為兩標準差為正，所以 $S_Y<S_X$．
   (3)由迴歸直線 L 的方程式
   $y-70=0.4(x-65)\Rightarrow y=0.4x+44$，
   得知點 $(70,72)$ 在 L 上．
   因此，將此點剔除後相關係數會變小．
   (4)將 $x=60$ 代入 $y=0.4x+44$，得 $y=68$，即歷史成績為 68 分．
   (5)因為 $r_{(1.2X,Y)}=r_{(X,Y)}=0.8$，所以相關係數仍為 $r=0.8$．
   又因為 $S_{1.2X}=1.2S_X$，
   所以 Y 對 X' 的迴歸直線斜率為
   $r\cdot\frac{S_Y}{1.2S_X}=\frac{1}{1.2}\cdot r\frac{S_Y}{S_X}=\frac{5}{6}\cdot r\frac{S_Y}{S_X}$，
   即為 L 斜率的 $\frac{5}{6}$ 倍，因為 L 的斜率為正，
   所以新斜率變小．
   故選(2)．

5. (1)因為 $\frac{0.608+0.672}{2}=0.64$，所以此選項正確．
   (2)因為 $[0.608,0.672]=[0.64-0.032,0.64-0.032]$，
   所以由公式 $\pm 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$，
   得 $2\sqrt{\frac{0.64\times(1-0.64)}{n}}=0.032\Rightarrow\frac{0.48}{\sqrt{n}}=0.016$．
   解得 $n=900$．
   (3)這不是信賴區間的意涵．

(4)因為再作一次調查 p 不一定仍是 0.64，

所以當 n 增為 4 倍時，區間的長度不一定減半．

(5)由抽樣誤差公式 $2\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}=2\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{1200}}$，

及 $p(1-p)=-\left(p-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$，

得知在 $p=\dfrac{1}{2}$，此次抽樣誤差最大值為

$2\sqrt{\dfrac{1}{4800}}=\dfrac{1}{\sqrt{1200}}=\dfrac{\sqrt{3}}{60}\approx 2.89\%$．

故選(1)(2)(5)．

6. 設甲、乙、丙分別為甲、乙、丙中獎的事件

(1)因為無獎籤只有兩支，且抽出後不再放回，所以必定有人抽中有獎籤．

(2) $P(甲\cap乙)=P(甲)P(乙|甲)=\dfrac{4}{6}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{5}$．

(3) $P(乙'|甲)=\dfrac{P(甲\cap乙')}{P(甲)}=\dfrac{\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}}{\frac{4}{6}}=\dfrac{2}{5}$．

(4)三人中獎的機率都是 $\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$．

(5) $P(丙|恰一人)=\dfrac{P(恰一人\cap丙)}{P(恰一人)}$

$=\dfrac{P(甲'\cap乙'\cap丙)}{P(甲\cap乙'\cap丙')+P(甲'\cap乙\cap丙')+P(甲'\cap乙'\cap丙)}$

$=\dfrac{\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{4}}{\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{4}}=\dfrac{1}{3}$．

故選(1)(3)(5)．

A. 列表如下：

點數	1	2	3	4	5	6
所得	1	2	3	4	5	6
機率	$a+b$	$2a+b$	$3a+b$	$4a+b$	$5a+b$	$6a+b$

由機率總和為 1 及期望值為 4 元，列得 $\begin{cases}21a+6b=1\\91a+21b=4\end{cases}$，

解得 $a=\dfrac{1}{35}$，$b=\dfrac{1}{15}$．

B. 取出 4 本有以下兩種情形：

(1)2 本年曆 2 本筆記本：有 $\dfrac{4!}{2!\,2!}=6$ 種．

(2)1 本年曆 3 本筆記本：有 $\dfrac{4!}{1!\,3!}=4$ 種．

故共 $6+4=10$ 種．

C. 設原含量為 A，經 x 年後含量一半以下，則

$A\times(1-10\%)^{\frac{x}{10}}<\dfrac{1}{2}A\Rightarrow\left(\dfrac{9}{10}\right)^{\frac{x}{10}}<\dfrac{1}{2}$．

兩邊取 log，得

$\dfrac{x}{10}\log\dfrac{9}{10}<\log\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{x}{10}(\log 9-\log 10)<-\log 2$

$\Rightarrow\dfrac{x}{10}(0.9542-1)<-0.3010$

$\Rightarrow x>\dfrac{-3.010}{-0.0458}\approx 65.7$

故至少要經過 66 年．

D. 依題意，得 $\begin{bmatrix}0&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}$，

因此，$\begin{bmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}$

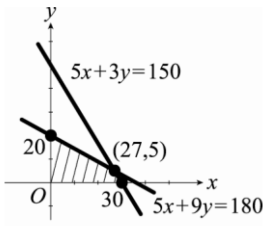
$=\dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-5\\1&3\end{bmatrix}$．

因為 $\overrightarrow{OP}=(-2,1)$，$\overrightarrow{OQ}=(-5,3)$，

所以三角形面積為 $\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-2&-5\\1&3\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}$．

一. (1)依題意，可列得 $\begin{cases}\dfrac{2x}{3}+\dfrac{2y}{5}\le 20\\\dfrac{x}{3}+\dfrac{3y}{5}\le 12\\x\ge 0\\y\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x+3y\le 150\\5x+9y\le 180\\x\ge 0\\y\ge 0\end{cases}$．

(2)目標函數為 $P=8x+10y$，可行解區如下圖所示：



利用頂點法：

(x,y)	$(0,0)$	$(30,0)$	$(27,5)$	$(0,20)$
$P=8x+10y$	0	240	266	200

得在 $x=27$，$y=5$ 時，$P=266$ 為最大值．

故應批發給甲店 27 公斤，乙店 5 公斤，才能獲得最大利潤 266 元．

二. (1)利用對數的運算性質，得

$f(x)=\left(\log_2\dfrac{x}{8}\right)\left(\log_2\dfrac{16}{x^2}\right)$

$=(\log_2 x-\log_2 8)(\log_2 16-2\log_2 x)$

$=(t-3)(4-2t)$

$=-2t^2+10t-12$．

(2)利用配方法，得

$f(x)=-2\left(t-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$．

故當 $t=\log_2 x=\dfrac{5}{2}$，即 $x=2^{\frac{5}{2}}=4\sqrt{2}$ 時，

$f(x)$ 有最大值 $\dfrac{1}{2}$．