第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 74 分）

一、單選題（18 分）

說明：第 1. 題至第 3. 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「解答欄」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 已知二階方陣 X 滿足 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}X+X\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$，且 $X^{103}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，則 $a+b+c+d=$？
(1) 103
(2) 105
(3) 2
(4) 206
(5) 208

答案：(5)

解析：令 $X=\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$，則 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2p-q & 2q \\ 2r-p-s & 2s-q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} 2p-q=0 \\ 2q=4 \\ 2r-p-s=-2 \\ 2s-q=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=1 \\ q=2 \\ r=0 \\ s=1 \end{cases}$$

即 $X=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow X^2=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2\times 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X^3=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2\times 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X^{103}=\begin{bmatrix} 1 & 2\times 103 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 206 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore a+b+c+d=1+206+0+1=208$

故選(5)。

2. 在 $\angle AOB$ 上，已知不含 O 點，在 $\overline{OA}$ 邊上有 6 個相異點，$\overline{OB}$ 邊上有 5 個相異點，如此連同 O 點共有 12 個點，若任取其中三個點並以此三點作三角形，則可以作出幾個不同的三角形？
(1) 30
(2) 35
(3) 36
(4) 165
(5) 220

答案：(4)

解析：$C_3^{12}-C_3^{7}-C_3^{6}=220-35-20=165$（個）

故選(4)。

3. $\triangle OAB$ 中，$\overline{OA}=2$，$\overline{OB}=1$，若 $\overline{OH}$ 垂直 $\overline{AB}$ 於點 H，且 $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$，則 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 之值為何？
(1) 2
(2) $\frac{1}{2}$
(3) $-\frac{1}{4}$
(4) $-\frac{1}{2}$
(5) -2

答案：(4)

解析：$\because \overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}\right)\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0$

$\therefore \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\frac{1}{4}|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{3}{4}|\overrightarrow{OB}|^2-\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$\Rightarrow \frac{-2}{4}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{4}\times2^2-\frac{3}{4}\times1=\frac{1}{4}\quad \therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{2}$

故選(4)。

二、多選題（32 分）

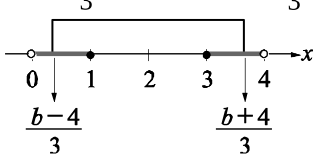
說明：第 4. 題至第 7. 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，選出正確選項，畫記在答案卡之「解答欄」。每題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

4. 若不等式 $|3x-b|\le 4$ 的解集合中整數只有 1，2，3 三個，則下列選項中的 b 值哪些可以滿足上述條件？
(1) 3.5
(2) 4.5
(3) 5.5
(4) 6.5
(5) 7.5

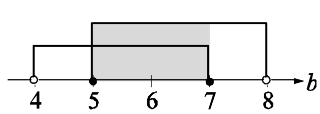
答案：(3)(4)

解析：$|3x-b|\le 4 \Leftrightarrow -4\le 3x-b\le 4 \Leftrightarrow \frac{b-4}{3}\le x\le\frac{b+4}{3}$

$\therefore 0<\frac{b-4}{3}\le 1$ 且 $3\le\frac{b+4}{3}<4$



$\Rightarrow 4<b\le 7$ 且 $5\le b<8\quad \therefore 5\le b\le 7$



故選(3)(4)。

5. 某班體育課測驗學生籃球定點投籃，規定每人在兩定點 A、B 處各投籃一次，其中 A 處投進得 3 分，B 處投進得 2 分；已知逸中在 A 處的命中率為 $\frac{1}{5}$，在 B 處的命中率為 q，同時逸中選擇在 A 處先投一球後再到 B 處投籃。令 X 表示逸中投籃後**所得的總分**，其機率分布如下：

X	0	2	3	5
機率	$\frac{1}{5}$	p_1	$\frac{1}{20}$	p_2

請選出正確的選項。

(1) $q=\frac{1}{4}$

(2) $p_1=\frac{3}{16}$

(3) $p_2=\frac{3}{20}$

(4) X 的期望值為 $\frac{21}{10}$ 分

(5) X 的標準差小於 3 分

答案：(3)(4)(5)

解析：(1)╳：$\left(1-\frac{1}{5}\right)(1-q)=\frac{1}{5}\Rightarrow q=\frac{3}{4}$

(2)╳：$p_1=\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}$

(3)○：$p_2=\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{20}$

(4)○：$E(X)=\frac{1}{5}\times 0+\frac{3}{5}\times 2+\frac{1}{20}\times 3+\frac{3}{20}\times 5=\frac{21}{10}$

(5)○：（解法 1）

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{5}\left(0-\frac{21}{10}\right)^2+\frac{3}{5}\left(2-\frac{21}{10}\right)^2+\frac{1}{20}\left(3-\frac{21}{10}\right)^2+\frac{3}{20}\left(5-\frac{21}{10}\right)^2}=\sqrt{2.19}<3$$

（解法 2）

因為 $E(X)=\frac{21}{10}$ 與 0，5 之距離都小於 3　$\therefore \sigma<3$

故選(3)(4)(5)。

6. 根據統計，棒球投手小郭，所投出的變速球中有 $\frac{3}{4}$ 的機率是好球、$\frac{1}{4}$ 的機率是壞球。強打者恰恰將好球看成壞球的機率為 $\frac{1}{6}$，將壞球看成好球的機率為 $\frac{1}{5}$。比賽中，當小郭決定使用變速球對決打者恰恰，恰恰的打擊策略為「好球就一定會揮棒，壞球就一定不揮棒」。請選出正確的選項。

(1) 小郭投出好球且恰恰「揮棒」的機率為 $\frac{5}{8}$

(2) 小郭投出壞球且恰恰「不揮棒」的機率為 $\frac{1}{20}$

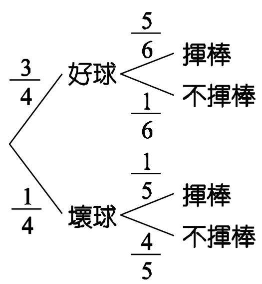
(3) 恰恰「揮棒」的機率為 $\frac{27}{40}$

(4) 已知小郭投出壞球的條件下，恰恰「不揮棒」的機率為 $\frac{4}{5}$

(5) 恰恰在「不揮棒」的條件之下，是好球的機率為 $\frac{5}{13}$

答案：(1)(3)(4)(5)

解析：



(1) ○：$\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{8}$

(2) ╳：$\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

(3) ○：$\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{27}{40}$

(4) ○

(5) ○：$\dfrac{\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}}{\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}}=\frac{5}{13}$

故選(1)(3)(4)(5)。

7. 某次選舉，民調機構對市長候選人甲、乙兩人的支持度進行民調，民調機構成功訪問了 1005 個合格選民，在 95% 的信心水準下，甲候選人支持度的信賴區間為 [0.439 , 0.501]，乙候選人支持度的信賴區間為 [0.409 , 0.471]，請依此結果選出正確的選項。
⑴ 如果重複做這個抽樣民意調查，則平均每 100 次大約會有 95 次所得的信賴區間會包含候選人們真正的支持率
⑵ 這次抽樣調查的抽樣誤差約是 3.1%
⑶ 在此次抽樣調查中，若提高信心水準，則必會加大信賴區間的寬度
⑷ 若在同個地區增加抽樣的合格選民數，必能在抽樣調查中加大信賴區間
⑸ 由此次調查可知道甲候選人有必勝的把握

答案：⑴⑵⑶

解析：⑴ ○：此為信賴區間與信心水準的意義

⑵ ○：$\frac{0.501-0.439}{2}=\frac{0.471-0.409}{2}=0.031=3.1\%$

⑶ ○：信心水準提高，則信賴區間會變大

⑷ ╳：增加抽樣人數，不一定會加大信賴區間

⑸ ╳：此調查無法保證甲候選人必勝

故選⑴⑵⑶。

三、選填題（24 分）

說明：第 A. 題至第 C. 題為選填題。將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號（8－17）內。每一題完全答對得 8 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

A. 已知有 M_1，M_2，……，M_{12} 共 12 名運動員參與比賽前的訓練，在一次訓練比賽中的得分紀錄如下：

編號	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}
得分	33	19	24	17	27	25	35	26	25	37	23	13

若從得分在 20 ～ 30 之間的運動員隨機抽取兩人，則這兩人得分和大於 50 的機率為 $\frac{⑧}{⑨}$ 。（化為最簡分數）

答案：$\frac{2}{5}$

解析：得分在 20 ～ 30 之間的有 M_3（24），M_5（27），M_6（25），M_8（26），M_9（25），M_{11}（23）共 6 人

由此 6 人中，選取 2 人的方法數為 $C^6_2=15$

此 6 人中，兩人得分超過 50 的有

（M_3 , M_5）、（M_5 , M_6）、（M_5 , M_8）、（M_5 , M_9）、（M_6 , M_8）、（M_8 , M_9）共 6 組

所以，所求為 $\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$ 。

B. a 為實數，若多項式 $f(x)=(x^2+x+2-a)(x^2-x+2+a)$ 恰可以分解成三個相異的實係數質因式的乘積，則 a 的範圍為 $a<\frac{⑩⑪}{⑫}$ 或 $a>\frac{⑬}{⑭}$ 。（化為最簡分數）

答案：$a<\frac{-7}{4}$ 或 $a>\frac{7}{4}$

解析：$\because f(x)$ 只能分解成三個相異的實係數質因式

$\therefore$ 兩多項式 $\begin{cases} x^2+x+2-a \\ x^2-x+2+a \end{cases}$

只有一式可分解成一次式乘積

令 $f_1(x)=x^2+x+2-a$，$f_2(x)=x^2-x+2+a$

(1) 若 $D_1=1^2-4(2-a)>0$ 且 $D_2=1^2-4(2+a)<0$

$\Rightarrow a>\frac{7}{4}$ 且 $a>-\frac{7}{4}$

$\Rightarrow a>\frac{7}{4}$

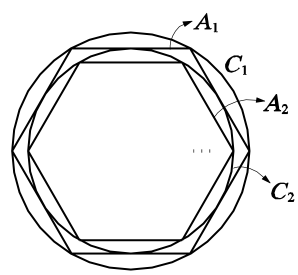
(2) 若 $D_1=1^2-4(2-a)<0$ 且 $D_2=1^2-4(2+a)>0$

$\Rightarrow a<\frac{7}{4}$ 且 $a<-\frac{7}{4}$

$\Rightarrow a<-\frac{7}{4}$

由(1)、(2)得 $a<-\frac{7}{4}$ 或 $a>\frac{7}{4}$ 。

C. 如右圖，在半徑為 10 的圓 C_1 內作一個內接正六邊形 A_1，再作此正六邊形 A_1 的內切圓 C_2，在圓 C_2 內再作內接正六邊形 A_2，如此繼續作下去。若 S_n 為前 n 個圓的面積之和，則 $\lim_{n\to\infty} S_n =$ ⑮⑯⑰π 。



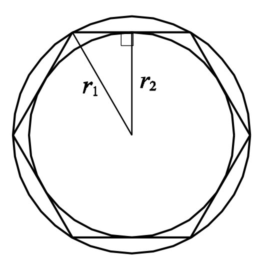
答案：400π

解析：如右圖，$r_1=10$

$\Rightarrow r_2=5\sqrt{3}$

$\therefore \frac{C_2}{C_1}=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2=\left(\frac{5\sqrt{3}}{10}\right)^2=\frac{3}{4}$

所求為 $\frac{\pi\times 10^2}{1-\frac{3}{4}}=400\pi$。



第貳部分：非選擇題（占 26 分）

說明：本部分共有二大題計算題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、(3)），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。<u>務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆</u>。每題配分標於題末。

一、已知：$\log 2 \approx 0.3010$，$\log 3 \approx 0.4771$。

(1) 請以對數律計算 $\log(25)^{16}$（不必四捨五入）。（3 分）

(2) 請以對數律計算 $\log(6)^{25}$（不必四捨五入）。（3 分）

(3) 若 $25^{16}+6^{25}$ 是 m 位正整數且最左邊的數字為 k，求正整數 m 與 k 之值。（6 分）

答案：(1) 22.368；(2) 19.4525；(3) $m=23$，$k=2$

解析：(1) $\log 25^{16}=\log 5^{32}=32\log 5$

$=32(1-\log 2)\approx 32\times 0.6990$

$=22.368$。

(2) $\log 6^{25}=25\log 6=25(\log 2+\log 3)$

$\approx 25\times(0.3010+0.4771)$

$=19.4525$。

(3)由(1)，$\log 25^{16}=22+0.368$

$=\log 10^{22}+\log 2.\cdots\cdots$

$\therefore 25^{16}=2.\cdots\cdots\times 10^{22}$

由(2)，$\log 6^{25}=19+0.4525$

$=\log 10^{19}+\log 2.\cdots\cdots$

$\therefore 6^{25}=2.\cdots\cdots\times 10^{19}$

則 $25^{16}+6^{25}=2.\cdots\cdots\times 10^{22}$

$\Rightarrow m=22+1=23$（位），$k=2$。

二、某咖啡館調配兩種新飲料，甲飲料每杯含奶粉 3 克，咖啡 8 克，乙飲料每杯含奶粉 5 克，咖啡 3 克，且每日原料的限額為奶粉 550 克，咖啡 640 克。如果甲飲料每杯可獲利 20 元，乙飲料每杯可獲利 15 元，且兩種飲料每日均能全部售出，則咖啡館的最大的收益為何？此時每日應調配兩種飲料各為多少杯？（14 分）

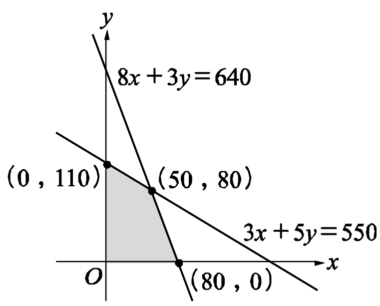
答案：調配甲種飲料 50 杯，乙種飲料 80 杯，會有最大的收益 2200 元

解析：設每日配製甲種飲料 x 杯，乙種飲料 y 杯，其中 x、y 為整數，則可獲利 $z=20x+15y$

依條件可得到不等式組：

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 3x+5y \leq 550 \\ 8x+3y \leq 640 \end{cases}$$

作出可行解區域



則

(x, y)	$(80, 0)$	$(50, 80)$	$(0, 110)$
$20x+15y$	1600	2200	1650

所以，每日調配甲種飲料 50 杯，乙種飲料 80 杯，會有最大的收益 2200 元。