龍騰文化指定科目考試全真模擬試卷

數學乙考科　解答卷

■答案

第壹部分：

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭	⑮
3	3	3	12	23	234	1234	2	7	5	3	2	4	4	0

第貳部分：

一.(1)	一.(2)	二.(1)	二.(2)
$\begin{cases} x+y\le 50 \\ 4x+3y\le 180 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$	當 $x=30$， $y=20$ 時，可得最大利潤 48 萬元	$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 10 & -7 \end{bmatrix}$

■解析

1. 所求等於將「甲甲乙乙丙丙」排一列的方法數，

即 $\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$ 種，故選(3)．

2. 前 n 項和

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$
$$=\log_3\frac{1}{2}+\log_3\frac{2}{3}+\log_3\frac{3}{4}+\cdots+\log_3\frac{n}{n+1}$$
$$=\log_3\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n+1}\right)=\log_3\frac{1}{n+1}\ .$$

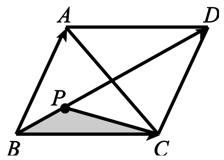
若 $S_n<-4$，則

$$\log_3\frac{1}{n+1}<-4\Rightarrow\frac{1}{n+1}<\frac{1}{81}\Rightarrow 81<n+1\Rightarrow 80<n\ ,$$

即 $n\ge 81$，

故選(3)．

3. 如圖，$ABCD$ 為平行四邊形．



因為 $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}$，

所以由題意得 $\overrightarrow{BD}=4\overrightarrow{BP}$，即 $\overline{BP}:\overline{PD}=1:3$．

因此，$\triangle BPC$ 面積 $=\dfrac{1}{4}\triangle BCD$ 面積 $=\dfrac{1}{4}\triangle ABC$ 面積．

故選(3)．

4. (1) 將 $y=0$ 代入 $y=\log_a x$，得 $\log_a x=0\Rightarrow x=1$，

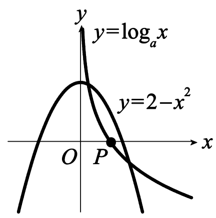
即 $P(1,0)$．因此，$\overline{OP}=1$．

(2) 因為 y 軸為 $y=\log_a x$ 圖形的漸近線，即圖形全在 y 軸的右邊，所以 $k>0$．

(3) 因為圖形是嚴格遞減，且 $\sqrt{2}<\sqrt{3}$，

所以 $\log_a\sqrt{2}>\log_a\sqrt{3}$．

(4) 因為 $y=\log_a x$ 的圖形與 $y=2-x^2$ 的圖形有兩個相異的交點，如右圖所示，所以方程式 $\log_a x=2-x^2$ 恰有二相異實根．



故選(1)(2)．

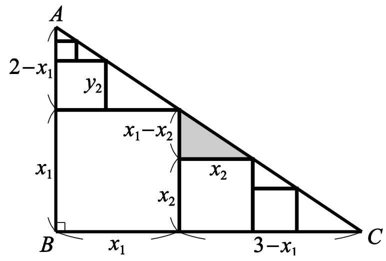
5. (1) 設 $S_1,S_2,S_3,\ldots$ 的邊長依序為 $x_1,x_2,x_3,\ldots$．

利用相似三角形，得 $\dfrac{x_1}{3-x_1}=\dfrac{x_1-x_2}{x_2}=\dfrac{2}{3}$．

解得 $x_1=\dfrac{6}{5}$，$x_2=\dfrac{3}{5}x_1=\dfrac{18}{25}$．

推得 $x_n=\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{6}{5}$，即 $a_n={x_n}^2=\left(\dfrac{9}{25}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{36}{25}$

因此，數列 $\langle a_n\rangle$ 是公比為 $\dfrac{9}{25}$ 的等比數列．



(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \dfrac{\frac{36}{25}}{1-\frac{9}{25}} = \dfrac{36}{16} = \dfrac{9}{4}$ ．

(3) 仿照 a_n 的推導，可得 $b_n = \left(\dfrac{4}{25}\right)^{n-1} \cdot \dfrac{36}{25}$ ．

因為 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ ，所以

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n + b_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0+0=0$ ．

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \dfrac{\frac{36}{25}}{1-\frac{4}{25}} = \dfrac{36}{21} = \dfrac{12}{7}$ ．

故選(2)(3)．

6. (1) 由題意，可列得 $\begin{cases} 25+y+10=55 \\ x+30=45 \end{cases}$，

解得 $x=15$， $y=20$ ．

(2) 因為將頻率視為機率，且令 X 表結算時間，所以 X 的機率分布為

X	1	1.5	2	2.5	3
P	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

期望值

$E(X) = 1\times\dfrac{3}{20} + 1.5\times\dfrac{3}{10} + 2\times\dfrac{1}{4} + 2.5\times\dfrac{1}{5} + 3\times\dfrac{1}{10}$

$= \dfrac{19}{10} < 2$（分）.

(3) 因為變異數

$Var(X) = E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2$

$= \left(1\times\dfrac{3}{20} + \dfrac{9}{4}\times\dfrac{3}{10} + 4\times\dfrac{1}{4} + \dfrac{25}{4}\times\dfrac{1}{5} + 9\times\dfrac{1}{10}\right)$

$-\left(\dfrac{19}{10}\right)^2$

$= \dfrac{159}{40} - \dfrac{361}{100} = \dfrac{73}{200}$ ，

所以標準差為 $\sqrt{\dfrac{73}{200}} < 1$（分）.

(4) 若等候時間不超過 2.5 分鐘，則前面 2 位顧客的結算時間有：

1 分鐘，1 分鐘；1 分鐘，1.5 分鐘；1.5 分鐘，1 分鐘，三種情形．

因為各顧客的結算相互獨立，

所以機率為

$\dfrac{3}{20}\times\dfrac{3}{20} + \dfrac{3}{20}\times\dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{10}\times\dfrac{3}{20} = \dfrac{9}{80} > 0.1$ ．

故選(2)(3)(4)．

7. (1) 機率為

$P(\text{不相鄰}) = 1 - P(\text{相鄰}) = 1 - \dfrac{4}{C^5_2} = 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}$ ．

(2) 由 $\mu_x = \dfrac{11+13+12}{3} = 12$ ， $\mu_y = \dfrac{25+30+26}{3} = 27$ ，

得斜率為

$$\frac{\sum_{i=1}^{3}\left(x_i-\mu_x\right)\left(y_i-\mu_y\right)}{\sum_{i=1}^{3}\left(x_i-\mu_x\right)^2} = \frac{(-1)(-2)+(1)(3)+(0)(-1)}{(-1)^2+1^2+0^2}$$

$$= \frac{5}{2} ．$$

(3) 因為斜率為正，所以 3 組數據為正相關．

(4) 因為迴歸直線的斜率為 $\dfrac{5}{2}$ ，且過點

$\left(\overline{x},\overline{y}\right) = (12,27)$，所以其方程式為

$y-27 = \dfrac{5}{2}(x-12)$，即 $y = \dfrac{5}{2}x - 3$ ．

將星期一的 $x=10$ 代入，得 $y=22$ 與 23 差 1；

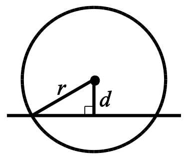
將星期五的 $x=8$ 代入，得 $y=17$ 與 16 差 1．

皆誤差不超過 2 顆，因此，得到的迴歸直線方程式是可靠的．

故選(1)(2)(3)(4)．

A. 直線 L 的方程式為 $x-y+1=0$ ．

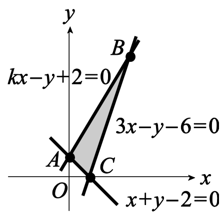
如右圖，



因為 $d = \dfrac{|1-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ，

所以弦長為 $2\sqrt{r^2-d^2} = 2\sqrt{9-2} = 2\sqrt{7}$ ．

B. 如右圖，



不等式表示的區域為 $\triangle ABC$ 的內部（含三邊），

其中 $A(0,2)$， $B\left(\dfrac{8}{3-k},\dfrac{6k+6}{3-k}\right)$，

$C(2,0)$， $-1<k<3$ ．

由 $\overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{8}{3-k},\dfrac{8k}{3-k}\right)$， $\overrightarrow{AC} = (2,-2)$ 及 $\triangle ABC$ 的面積 16，列得

$\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \dfrac{8}{3-k} & \dfrac{8k}{3-k} \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\right| = 16 \Rightarrow \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{-16-16k}{3-k}\right| = 16$

$\Rightarrow 8\left|\dfrac{1+k}{3-k}\right| = 16 \Rightarrow \dfrac{1+k}{3-k} = 2$ ．

解得 $k = \dfrac{5}{3}$ ．

C.　依題意，得

$$P(x)=R(x)-C(x)$$
$$=(3000x-20x^2)-(500x+4000)$$
$$=-20x^2+2500x-4000,$$
$$M_P(x)=P(x+1)-P(x)$$
$$=\left(-20(x+1)^2+2500(x+1)-4000\right)$$
$$-\left(-20x^2+2500x-4000\right)$$
$$=-40x+2480 .$$

因為 $M_P(x)$ 是嚴格遞減函數，所以當 $x=1$ 時，$M_P(x)$ 有最大值 2440 元．

一、(1) 依題意，可列得

$$\begin{cases} x+y\le 50 \\ 1.2x+0.9y\le 54 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y\le 50 \\ 4x+3y\le 180 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} .$$

(2) 利潤為 $P=(4x\cdot 0.55+6y\cdot 0.3)-(1.2x+0.9y)$

$=x+0.9y$ 萬元．

可行解如圖所示．將右圖中四個頂點代入 P，得對應值如下：

(x,y)	$(0,0)$	$(45,0)$	$(30,20)$	$(0,50)$
P	0	45	48	45

根據頂點法，

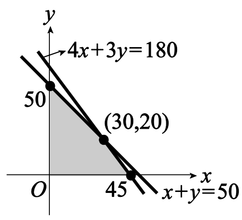
當 $x=30$，$y=20$ 時，

$P=48$ 為最大值．

故黃瓜種植 30 公頃，

韭菜種植 20 公頃時，

可得最大利潤 48 萬元．



二、(1) 將 a_{n+1}，b_{n+1} 與 a_n，b_n 的關係式以矩陣表示如下：

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} .$$

因此，推得

$$\begin{bmatrix} a_{n+3} \\ b_{n+3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^3\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix},$$

故 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$.

(2) 因為 $\begin{bmatrix} a_{n+3} \\ b_{n+3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$，

所以 $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} a_{n+3} \\ b_{n+3} \end{bmatrix}$

$$=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{n+3} \\ b_{n+3} \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 10 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{n+3} \\ b_{n+3} \end{bmatrix} .$$

故 $B=\begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 10 & -7 \end{bmatrix}$.