

第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題共占 76 分)

一、單選題 (12 分)

說明：第 1 題至第 2 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「解答欄」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設 \vec{a} 和 \vec{b} 為互相垂直的單位向量， $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ 、 $\vec{v} = 5\vec{a} + \vec{b}$ ，則 \vec{u} 、 \vec{v} 的夾角是下列哪一個選項？

- (1) 30°
- (2) 45°
- (3) 60°
- (4) 90°
- (5) 120°

答案：(2)

解析： $\because \vec{a} \perp \vec{b} \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (5\vec{a} + \vec{b})}{|2\vec{a} + 3\vec{b}| |5\vec{a} + \vec{b}|} \\ &= \frac{10|\vec{a}|^2 + 17\vec{a} \cdot \vec{b} + 3|\vec{b}|^2}{\sqrt{4|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2} \times \sqrt{25|\vec{a}|^2 + 10\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2}} \\ &= \frac{10+3}{\sqrt{13} \times \sqrt{26}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Rightarrow \theta &= 45^\circ \\ &\text{故選(2)。}\end{aligned}$$

2. 下列哪一個選項最接近 10 這個數值？

- (1) $\log_2 1021$
- (2) $\log_2 1022$
- (3) $\log_2 1023$
- (4) $\log_2 1025$
- (5) $\log_2 1026$

答案：(4)

解析： $\because \log_2 1024 = 10$

\therefore 最接近的是 $\log_2 1023$ 或是 $\log_2 1025$ 這兩個數值

$$\text{又 } \log_2 1025 - \log_2 1024 = \log_2 \frac{1025}{1024} < \log_2 \frac{1024}{1023} = \log_2 1024 - \log_2 1023$$

因此 $\log_2 1025$ 較接近 10

故選(4)。

二、多選題(40 分)

說明：第 3 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，選出正確選項，畫記在答案卡之「解答欄」。每題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

3. 設 a 為實數且 $a > 27$ ，二次函數

$$f(x) = a \cdot \frac{(x-9)(x-10)}{(5-9)(5-10)} + a \cdot \frac{(x-5)(x-10)}{(9-5)(9-10)} + 27 \cdot \frac{(x-9)(x-5)}{(10-9)(10-5)}。$$

請選出下列正確的選項。

- (1) $f(5) = f(9)$
- (2) $f(10) > f(9)$
- (3) $f(7)$ 是這個二次函數的最小值
- (4) $f(6) = f(8)$
- (5) $f(4) = 27$

答案：(1)(4)(5)

解析：(1) ○：根據拉格朗日插值多項式可知 $f(5) = f(9) = a$

(2) ×： $f(9) = a > 27 = f(10)$

(3) ×：因此二次函數的對稱軸為 $x = \frac{5+9}{2} = 7$

又 $f(9) > f(10)$ 表示拋物線開口向下

故 $f(7)$ 是這個二次函數的最大值

(4) ○： \because 對稱軸為 $x = 7$

$\therefore f(6) = f(8)$

(5) ○： \because 對稱軸為 $x = 7$

$\therefore f(4) = f(10) = 27$

故選(1)(4)(5)。

4. 設 A 、 B 均為二階方陣， I 是二階單位方陣，且滿足 $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 。請選出下列正確的選項。

- (1) 方陣 A 有反方陣、方陣 B 沒有反方陣
- (2) 方陣 A 沒有反方陣、方陣 B 有反方陣
- (3) 方陣 A 、 B 都有反方陣
- (4) 方陣 A 、 B 都沒有反方陣
- (5) 方陣 BA 一定有反方陣

答案：(3)(5)

解析：(1)(2)(3)(4) 一個方陣的行列式值不為 0 時，此方陣的反方陣存在

$$\text{又當 } AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ 時，} (\det A) \times (\det B) = \det AB = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq 0$$

$$\Rightarrow \det A \neq 0 \text{ 且 } \det B \neq 0$$

因此，方陣 A 、 B 都有反方陣，故(3)正確

(5) ○： $\det BA = (\det B) \times (\det A) \neq 0$ ，所以方陣 BA 有反方陣

故選(3)(5)。

5. 有一遊戲玩法如下：一開始發給玩家 8 萬元，必須通過三個關卡，每一關卡都有 A、B、C 三個答案選項，其中只有一個正確，押中正確選項會保留押在該選項的金額，其餘皆沒收然後進行下一關，若完全沒押到正確選項則淘汰該玩家。玩家甲選擇在過每一個關卡時，將所有錢押在其中一個選項；玩家乙的選擇是分散風險，在過每一個關卡時，將錢分成一半，分別押在其中兩個選項。若甲、乙兩人在每個關卡都選擇任意猜答。請選出下列正確的選項。

- (1) 玩家甲過三關的機率等於玩家乙過三關的機率
- (2) 玩家甲過三關的機率小於玩家乙過三關的機率
- (3) 玩家甲所得金額的期望值等於玩家乙所得金額的期望值
- (4) 玩家甲所得金額的期望值大於玩家乙所得金額的期望值
- (5) 玩家甲所得金額的期望值為 $\frac{8}{27}$ 萬元

答案：(2)(3)(5)

解析：(1)(2) 甲過三關的機率是 $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ ，乙過三關的機率是 $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

$$(3)(4)(5) \text{ 甲過三關的期望值為 } 8 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{8}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{27} \text{ (萬元)}$$

$$\text{乙過三關的期望值為 } 4 \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27} \text{ (萬元)}$$

故選(2)(3)(5)。

6. 請選出下列正確的選項。

- (1) $\log 2 + \log 3 > \log 5$
- (2) $(\log 2)(\log 3) > \log 6$
- (3) $\log(\sqrt{2} + \sqrt{3}) > \log \sqrt{6}$
- (4) $\log \sqrt{2} + \log \sqrt{3} > \log(\sqrt{2} + \sqrt{3})$
- (5) $\log \sqrt{2} + \log \sqrt{3} > (\log \sqrt{2})(\log \sqrt{3})$

答案：(1)(3)(5)

解析：(1) ○： $\log 2 + \log 3 = \log 6 > \log 5$

$$(2) \times : (\log 2)(\log 3) < \log 3 < \log 6$$

$$(3) \circ : \log(\sqrt{2} + \sqrt{3}) > \log(\sqrt{2} + \sqrt{2}) = \log \sqrt{8} > \log \sqrt{6}$$

$$(4) \times : \log \sqrt{2} + \log \sqrt{3} = \log \sqrt{6} < \log 2 \sqrt{2} < \log(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

$$(5) \circ : \log \sqrt{2} + \log \sqrt{3} > \log \sqrt{2} > (\log \sqrt{2})(\log \sqrt{3})$$

故選(1)(3)(5)。

7. 2014 年是六都市長選舉，在選舉前民調公司對 A 城市的選民做了一項調查，得到的結果是：「高達六成四的受訪者表示支持甲市長候選人。」另外還有：「調查於十月十九日至十月二十九日進行，成功訪問了九百位 A 城市成年選舉人……；在百分之九十五的信心水準下，抽樣誤差為 k 個百分點。調查是以 A 城市的住宅電話為母體作尾數兩位隨機抽樣。」請根據以上的敘述，選出下列正確的選項。
- (1) 在 A 城市的所有成年選舉人中，有 64 % 支持甲市長候選人
 - (2) $k=3.2$
 - (3) 在 95 % 信心水準下的信賴區間為 $[0.608, 0.672]$
 - (4) 如果我們重新訪問 A 城市的九百位成年選舉人，那這次得到甲市長支持率有 95 % 的可能會落在區間 $[64 \% - k \% , 64 \% + k \%]$ 內
 - (5) 若進行多次九百人的訪談民調，則每一次得到的支持率大約有 95 % 會落在區間 $[64 \% - k \% , 64 \% + k \%]$ 內

答案：(2)(3)

解析：(1) ×：64 % 是受訪者支持甲候選人的比例，不一定等於 A 城市所有選舉人的支持率

(2) ○：在 95 % 信心水準下，信賴區間的誤差值為

$$2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2\sqrt{\frac{0.64 \times 0.36}{900}} = 0.032 = 3.2 \%$$

∴ $k=3.2$

(3) ○：在 95 % 信心水準下的信賴區間為

$$\left[\hat{p} - 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right] = [0.64 - 0.032, 0.64 + 0.032] = [0.608, 0.672]$$

(4) ×：這不是 95 % 信心水準的意義

(5) ×：這也不是 95 % 信心水準的意義。應該是：若進行多次九百人的訪談民調，就有很多個 95 % 的信賴區間，則大約每一百個信賴區間就會有 95 個包含真正的支持率

故選(2)(3)。

三、選填題 (24 分)

說明：第 A. 題至第 C. 題為選填題。將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (8-13) 內。每一題完全答對得 8 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

- A. 好吃的車輪餅有紅豆、奶油、花生、菜脯共 4 種口味。小明買了 20 個車輪餅，紅豆和奶油的個數一樣多，且花生的個數比菜脯的個數多兩個，則小明共有 ⑧⑨ 種不同的買法。
(註：每一種口味不一定要購買)

答案：10

解析：假設買紅豆 x 個、菜脯 y 個

$$\text{依題意 } x + x + y + (y + 2) = 20 \Rightarrow x + y = 9$$

$$(x, y) = (0, 9), (1, 8), (2, 7), \dots, (8, 1), (9, 0) \text{ 共 10 種}$$

故有 10 種不同買法。

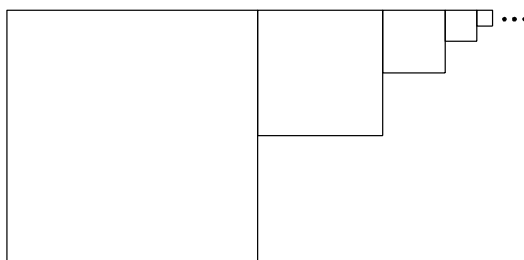
B. $\triangle ABC$ 是銳角三角形，若 \overrightarrow{AB} 在 \overrightarrow{AC} 上的正射影是 $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AC}$ ，而 \overrightarrow{AC} 在 \overrightarrow{AB} 上的正射影是 $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{7} \overrightarrow{AB}$ ，又 $\triangle ABC$ 的面積為 70，則 $\triangle ADE$ 的面積為 ⑩⑪。

答案：18

解析： $\triangle ADE$ 的面積： $\triangle ABC$ 的面積 = $\frac{1}{2} |\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{AE}| \sin A : \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin A = 9 : 35$

$\therefore \triangle ADE$ 的面積為 $70 \times \frac{9}{35} = 18$ 。

C. 如下圖，最大正方形的面積為 $3\sqrt{2}$ ，相鄰兩個正方形的邊長比為 2 : 1，則無窮多個這樣的正方形面積和為 ⑫⑬。



答案： $4\sqrt{2}$

解析：相鄰的兩個正方形的邊長比為 2 : 1，面積比即為 4 : 1

所求為以最大的正方形面積做為首項，公比為 $\frac{1}{4}$ 的無窮等比級數和

即無窮多個這樣的正方形面積和為 $\frac{3\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{4}} = 4\sqrt{2}$ 。

第貳部分：非選擇題(占 24 分)

說明：本部分共有二大題計算題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明題號（一、二）與子題號（(1)、(2)），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每題配分標於題末。

一、坐標平面上，已知 $\overline{BC} = 10$ ， $\overleftrightarrow{BC} : 3x - 4y = 11$ ，且 \overline{BC} 的中點為 $(1, -2)$ 。試求：

(1) B 、 C 兩點坐標為何？(6 分)

(2) 若 $\triangle ABC$ 為 $\overline{AB} = \overline{AC} = 13$ 的等腰三角形，則 A 點坐標為何？(6 分)

答案：(1) $(5, 1), (-3, -5)$ ；(2) $\left(\frac{41}{5}, -\frac{58}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{31}{5}, \frac{38}{5}\right)$

解析：(1) $\overleftrightarrow{BC} : 3x - 4y = 11$ 的方向向量可為 $(4, 3)$

又 $|(4, 3)| = 5$

$\therefore B、C$ 兩點坐標為 $(1, -2) \pm (4, 3) = (5, 1), (-3, -5)$ 。

(2) $\overleftrightarrow{BC} : 3x - 4y = 11$ 的法向量可為 $(3, -4)$ ，又 $|(3, -4)| = 5$ 。

$\therefore A$ 點坐標為 $(1, -2) \pm \frac{12}{5} (3, -4) = \left(\frac{41}{5}, -\frac{58}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{31}{5}, \frac{38}{5}\right)$ 。

二、一農夫有田 3 甲，若種水稻，每甲每期產量為 8000 斤；若種小麥，每甲每期產量為 2000 斤。但種水稻每甲每期需成本 20000 元，而小麥每甲每期需成本 8000 元，且水稻每斤可賣 7 元，小麥每斤可賣 10 元。現在農夫有 40000 元，若只種水稻與小麥，試求：

- (1) 水稻與小麥應各種幾甲，才能得到最大利潤？且最大利潤為多少元？(8 分)
- (2) 若該區農會答應貸款給農夫，則農夫應貸款多少錢才能獲得最大利潤？

此時，水稻與小麥又應該各種幾甲？(4 分)

答案：(1) 應種水稻 $\frac{4}{3}$ 甲，小麥 $\frac{5}{3}$ 甲，可得到最大利潤為 68000 元；

(2) 應貸款 20000 元，此時應種水稻 3 甲，小麥 0 甲

解析：(1) 設水稻與小麥各種 x 甲、 y 甲

$$\text{依題意得} \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + y \leq 3 \\ 20000x + 8000y \leq 40000 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{目標函數 } P(x, y) &= 8000x \times 7 + 2000y \times 10 - 20000x - 8000y \\ &= 36000x + 12000y = 12000(3x + y) \end{aligned}$$

根據平行線法則，最大值發生在 $x = \frac{4}{3}$ ， $y = \frac{5}{3}$ 時

故水稻與小麥應各種 $\frac{4}{3}$ 甲與 $\frac{5}{3}$ 甲，

此時最大利潤為 $12000 \left(3 \times \frac{4}{3} + \frac{5}{3} \right) = 68000$ 元。

- (2) 由右圖可知，直線愈向右移利潤愈大

即直線 $20000x + 8000y = k$ 會過點 $(3, 0)$ ，

將 $(3, 0)$ 代入，得 $k = 60000$

因此，再增貸 $60000 - 40000 = 20000$ 元可獲得最大利潤，

此時水稻與小麥各應種 3 甲與 0 甲。

