

105年 指定科目考試模擬試題 數學乙

答案與解析

答案

第壹部分：選擇題

1.	3	2.	3	3.	124	4.	12345	5.	1245	6.	1235	7.	35	8.	3	9.	2	10.	7
11.	—	12.	1	13.	2														

第貳部分：非選擇題

- (1) $ab=2$; (2) $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 。
- 健康堅果包 210 公斤，快樂堅果包 90 公斤，可得最高利潤 6840 元。

解析

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. **答案** 3

解析 由餘式定理知：

$f(x) \div (x-6)$ 的餘式是 $f(6) = 6^{105} + 2016$ ，
只需考慮 6^{105} 是幾位數。

$$\begin{aligned} \log 6^{105} &= 105 \times (\log 2 + \log 3) \\ &\approx 105 \times (0.3010 + 0.4771) \\ &= 81.7005, \end{aligned}$$

首數為 81，故代表 82 位數，
故選(3)。

2. **答案** 3

解析

$ m-n $	0	1	2	3
次數	4	6	4	2

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{16} (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) + 1 \times \frac{6}{16} + \\ &\quad 2 \times \frac{4}{16} + 3 \times \frac{2}{16} \\ &= \frac{25}{8}, \end{aligned}$$

故選(3)。

二、多選題

3. **答案** 124

解析 (1) 由於迴歸線必過 $(\mu_x, \mu_y) = (4, 3)$ ，

可知迴歸線斜率為 $\frac{6-3}{5-4} = 3$ ，

因此迴歸線為 $y-3 = 3(x-4)$ 。

(2) $(2, -3)$ 代入迴歸線方程式，
得 $-6 = 3(2-4)$ ，故符合。

(3) $3 = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0.75 \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \Rightarrow \sigma_y = 4\sigma_x$ ，

所以 x 的標準差小於 y 的標準差。

(4) 若 $x=7$ ，可預測 y 值 $= 3(7-4) + 3 = 12$ 。

(5) 若增加一組資料恰在原迴歸線上，
則新的 11 組資料形成的迴歸線與原迴歸
線相同。

故選(1)(2)(4)。

4. **答案** 12345

解析

(1) $\bigcirc : f(i+1) = 0$ 由虛根成對，
可知 $f(-i+1) = 0$ ，故 $f(i-1) \neq 0$ 。

(2) $\bigcirc : \because \pi > 2 \therefore f(\pi) > 0$

(3) $\bigcirc : x = i+1$
 $\Rightarrow (x-1)^2 = i^2 \Rightarrow (x-1)^2 + 1 = 0$
 $\Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$ ，

可知 $f(x)$ 有因式 x^2-2x+2 ，
 又 $f(x)>0$ 的解為 $x>2$ 或 $x<1$
 可知 $f(1)=0, f(2)=0$ ，故可得
 $f(x)=(x^2-2x+2)(x-1)(x-2)$ 。
 $f(0)=2\times(-1)\times(-2)=4$

$\therefore y=f(x)$ 的圖形與 y 軸交於 $(0, 4)$

$$\begin{aligned} (4) \text{ } \bigcirc : f(x) &= (x^2-2x+2)(x-1)(x-2) \\ &= [(x-1)^2+1](x-1)(x-2) \\ &= (x-1)^2(x-1)(x-2) + \\ &\quad (x-1)(x-2) \\ &= (x-1)^2(x-1)(x-2) + \\ &\quad (x-1)^2-(x-1), \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式為 $-x+1$ 。

(5) \bigcirc ：因為 $y=f(x)$ 為四次實係數多項式
 且最高項係數為正，且與 x 軸交於兩
 點，當 x 逐漸變大時， $f(x)$ 變大，
 同理，當 x 為負值且逐漸變小時，
 $f(x)$ 亦變大。

$f(x)=2016$ 的實根可視為
 $y=f(x)$ 與 $y=2016$ 兩圖形交點，
 可知必有兩交點。故有 2 實根。

故選(1)(2)(3)(4)(5)。

5. 答案 1245

解析 由 $1 < a < b < a^3 < 200$ ，

可知 a 可能為 2, 3, 4, 5。

分類討論：

$a=2$ 時，

$2 < b < 8$ ，滿足條件的 $b=4$

$\Rightarrow a+b=6$ 。

$a=3$ 時，

$3 < b < 27$ ，滿足條件的 $b=9$

$\Rightarrow a+b=12$ 。

$a=4$ 時，

$4 < b < 64$ ，滿足條件的 $b=8, 16, 32$

$\Rightarrow a+b=12, 20, 36$ 。

$a=5$ 時，

$5 < b < 125$ ，滿足條件的 $b=25$

$\Rightarrow a+b=30$ 。

故選(1)(2)(4)(5)。

6. 答案 1235

解析 (1) PM2.5：

$$(42+12+43+25+30+56+76+60+31$$

$$+34+20+27) \div 12 = 38,$$

$$(31+34+20+27) \div 4 = 28,$$

$$\text{濃度為 } 38 \times 0.5 + 28 \times 0.5 = 33。$$

(2) 適合敏感性族群正常戶外活動的時間為分
 類等級低 (<35) 的時間，

故有 07~08, 09~10, 10~11, 14~15,

15~16, 16~17, 17~18,

共 7 個小時。

(3) 一呼吸道過敏的人想要到戶外運動，

需選擇等級低的時間，

故 07~08 為合適時段。

(4) 前 12 小時中達到中、高級程度時間有

5 個小時，其比例少於一半。

(5) 達到最高等級的時段是中午 12~13 時。

故選(1)(2)(3)(5)。

7. 答案 35

解析 (1) \times ：甲隊在每個賽程表中獲得冠軍的機率
 都是 $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ 。

(2) \times ：乙隊在每個賽程表中獲得冠軍的機率
 都是 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ 。

(3) \bigcirc ：丙隊在賽程表(c)中，
 勝甲得冠軍或勝丁得冠軍
 $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{27}$ 。

(4) \times ：在賽程表(a)中，丁隊得到冠軍的機率為
 $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ ，

在賽程表(c)中，丁隊得到冠軍的機率為

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \\ = \frac{2+3}{27} = \frac{5}{27}, \end{aligned}$$

兩者的機率並不相同。

(5) \bigcirc ：賽程表(a)時，
 甲丙兩隊在冠軍戰遭遇的機率為

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3},$$

賽程表(c)時，

甲丙兩隊在冠軍戰遭遇的機率為

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}。$$

故選(3)(5)。

三、選填題

A. 答案 3

$$\text{解析 } 0.5a = \frac{50+a-5}{90} = \frac{45+a}{90},$$

$$\text{總和：} \frac{7}{1 - \frac{45+a}{90}} = 12+a$$

$$\Rightarrow \frac{7}{45-a} = 12+a \Rightarrow \frac{630}{45-a} = 12+a$$

$$\Rightarrow a^2 - 33a + 90 = 0, (a-3)(a-30) = 0$$

$\therefore a=3$ 或 30 (不合)

B. 答案 27

$$\text{解析 } -\frac{a^2+4b}{-4} = 9, a^2+4b=36, C \text{ 點坐標 } (k, 9)。$$

令 $y=0$ 代入 $-x^2+ax+b=0$ 有兩根 α, β
 恰好是 A, B 兩點的 x 坐標，

$$\begin{aligned} \text{則 } \overline{AB} &= \sqrt{(\alpha-\beta)^2} = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta} \\ &= \sqrt{a^2+4b} = \sqrt{36} = 6, \end{aligned}$$

故 $\triangle ABC = 9 \times 6 \div 2 = 27$ 。

C. **答案** $-1 < k < 2$

解析 $\vec{PA} + 2\vec{PB} + 3\vec{PC} = k(\vec{PB} - \vec{PA})$
 $\Rightarrow (1+k)\vec{PA} + (2-k)\vec{PB} + 3\vec{PC} = \vec{0}$ 。
 若 P 在 $\triangle ABC$ 內部，則
 $\ell\vec{PA} + m\vec{PB} + n\vec{PC} = \vec{0}$ 中各項係數 ℓ, m, n
 需同時為正或同時為負，
 故 $(1+k) > 0, (2-k) > 0$ ，可得 $-1 < k < 2$ 。

第貳部分：非選擇題

1. **答案** (1) $ab=2$; (2) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

解析 (1) $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} -1 & a \\ -b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 0 & -1+ab \\ -ab+1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
 $\therefore ab-1=1 \Rightarrow ab=2$

(2) $B^{-1} = \frac{1}{ab-1} \begin{bmatrix} b & -1 \\ -1 & a \end{bmatrix}$
 $= \frac{1}{2-1} \begin{bmatrix} b & -1 \\ -1 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & -1 \\ -1 & a \end{bmatrix},$

$B+B^{-1} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -1 \\ -1 & a \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},$

$a+b = -3$ 。

由(1)知 $ab=2$ ，且 $a+b=-3$ ，

解得 $a = -1, -2$ ，

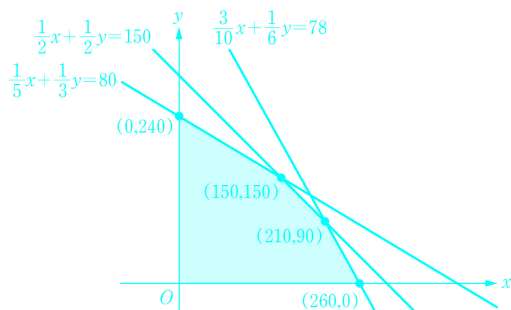
故 $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 。

2. **答案** 健康堅果包 **210** 公斤；
 快樂堅果包 **90** 公斤，
 可得最高利潤 **6840** 元

解析 假設混合出健康堅果包 x 公斤，
 快樂堅果包 y 公斤。

$$\text{列出不等式組} \begin{cases} \frac{3}{10}x + \frac{1}{6}y \leq 78 \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{3}y \leq 80 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \leq 150 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases},$$

畫出可行解區域(如下圖)，並找出頂點，
 目標函數 $P = 24x + 20y$ 最大值，



由頂點法

(x, y)	$(260, 0)$	$(210, 90)$	$(150, 150)$	$(0, 240)$
P	6240	6840	6600	4800

故知混合出健康堅果包 210 公斤，

快樂堅果包 90 公斤。

可得最高利潤 6840 元。