龍騰文化指定科目考試模擬試卷

數學乙考科　解答卷

■答案

第壹部分：

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭
4	5	125	12	135	14	345	–	1	2	1	2	0	–
⑮	⑯												
3	3												

第貳部分：

一.(1)	一.(2)	二.(1)	二.(2)
$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	8	147

■解析

1. 改寫兩集合

$A=\{x \mid a-1<x<a+1,\ x\in\mathbb{R}\}$，

$B=\{x \mid x<b-2$ 或 $x>b+2,\ x\in\mathbb{R}\}$

因為 $A\subset B$，所以 $a+1\le b-2$ 或 $a-1\ge b+2$，

即 $a-b\le -3$ 或 $a-b\ge 3$．

綜合兩式，得 $|a-b|\ge 3$，故選(4)．

2. 由方程式，得

$$a-2^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{2+x}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2^x}\Rightarrow a=2^x+\frac{1}{4\times 2^x}\ .$$

利用算幾不等式，得

$$2^x+\frac{1}{4\times 2^x}\ge 2\sqrt{2^x\times\frac{1}{4\times 2^x}}=1,$$

即 $a\ge 1$．

在 5 個選項中，只有 $\sqrt[3]{3}$ 的值大於 1，故選(5)．

3. 由除法原理，並令 $g(x)=x^2+ax+b$，得

$$f(x)=(x+2)g(x)+3=(x+2)(x^2+ax+b)+3\ .$$

因為 $g(x)=0$ 沒有實根，所以判別式 $a^2-4b<0$，

即 $b>\frac{a^2}{4}$．

(1) $f(-2)=0\times(4-2a+b)+3=3$．

(2) $f(0)=2\times b+3>\frac{a^2}{2}+3>3$．

(3) 根據虛根成對定理，得知三次方程式 $f(x)=0$ 至少一實根．

(4) 因為 $g(x)=x^2+ax+b$ 恆正，所以當 $x>0$ 時，$f(x)>3$，

因此 $f(x)=0$ 沒有正實根．

(5) 由(4)知，$f(x)=0$ 的實根為負實數，所以 $f(x^2)=0$ 沒有實根．

故選(1)(2)(5)．

4. (1) 因為 $\triangle OA_1B_1$ 與 $\triangle OA_2B_2$ 相似，所以其面積比為

$$\frac{R}{S+R}=\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2=\frac{1}{4},$$

得 $4R=S+R\Rightarrow S=3R$．

(2) 因為 $\triangle OA_{100}B_{100}$ 與 $\triangle OA_{101}B_{101}$ 相似，所以其面積比為

$$\left(\frac{a_{100}}{a_{101}}\right)^2=\frac{R+99S}{R+100S}=\frac{R+99\times 3R}{R+100\times 3R}=\frac{298}{301}\ .$$

(3) 因為 $\triangle OA_1B_1$ 與 $\triangle OA_nB_n$ 相似，所以其面積比為

$$\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^2=\frac{R}{R+(n-1)S}=\frac{R}{R+(n-1)\times 3R}=\frac{1}{3n-2}\ .$$

(4) 因為 $a_1=1$，所以由(3)，得

$$\left(\frac{1}{a_n}\right)^2=\frac{1}{3n-2}\Rightarrow a_n=\sqrt{3n-2}\ ,$$

因此，$\langle a_n\rangle$ 不是等比數列．

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n-2}}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{3-\dfrac{2}{n}}=\sqrt{3}$ ．

故選(1)(2)．

5. 設 A_i 表通過第 i 關，$\overline{A_i}$ 表闖第 i 關失敗．

(1) $P(X=2)=P\left(A_1A_2\overline{A_3}\right)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{27}$ ．

(2) $P(X=3)=P\left(A_1A_2A_3\overline{A_4}\,\overline{A_4}\right)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{27}$ ．

(3) $P(X=4)=P\left(A_1A_2A_3A_4\right)+P\left(A_1A_2A_3\overline{A_4}A_4\right)$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2}{9}\ .$$

(4) X 的機率分布為：

x	0	1	2	3	4
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{9}$

$$E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{9}+2\times\frac{4}{27}+3\times\frac{2}{27}+4\times\frac{2}{9}$$

$$=\frac{44}{27}<2\ .$$

(5) 因為

$$E\left(X^2\right)=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{2}{9}+2^2\times\frac{4}{27}+3^2\times\frac{2}{27}+4^2\times\frac{2}{9}$$

$$=\frac{136}{27}\ ,$$

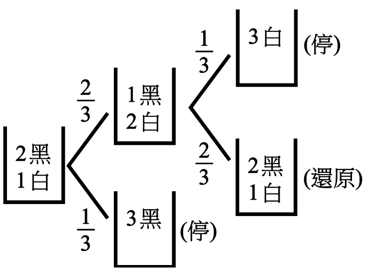
所以

$$Var(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2=\frac{136}{27}-\left(\frac{44}{27}\right)^2$$

$$=\frac{1736}{729}>2\ .$$

故選(1)(3)(5)．

6. 分析如下：



(1) 機率為 $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$ ．

(2) 機率為 $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{27}$ ．

(3) 由樹狀圖，可推得

若奇數回停，則全黑球；若偶數回停，則全白球．

因為 9 是奇數，所以全黑球．

(4) 因為第 9 回取到黑球時箱中為 1 黑 2 白，

所以第 10 回取到黑球停止的機率為 $\dfrac{1}{3}$ ．

(5) 機率為 $\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^4\times\dfrac{1}{3}+\cdots=\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{9}}=\dfrac{3}{5}$ ．

故選(1)(4)．

7. (1) 因為 $\begin{bmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}$，所以 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ ．

又因為 $1+\dfrac{1}{2}\neq 1$，所以 A 不是轉移矩陣．

(2) 因為

$$\begin{bmatrix}a_4\\ b_4\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}a_3\\ b_3\end{bmatrix}=AA\begin{bmatrix}a_2\\ b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ 1\end{bmatrix},$$

所以 $a_4=10$ ．

(3) 因為 A 的反方陣 $A^{-1}=2\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，所以

$$\begin{bmatrix}a_3\\ b_3\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}a_4\\ b_4\end{bmatrix}=A^{-1}A^{-1}\begin{bmatrix}a_5\\ b_5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}32\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}26\\ 4\end{bmatrix},$$

即 $a_3=26$ ．

(4) $A^2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1+\frac{1}{2}\\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^2\end{bmatrix},$

$$A^3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1+\frac{1}{2}\\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^3\end{bmatrix},$$

推得 $A^n=\begin{bmatrix}1 & 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n\end{bmatrix},$

即 $y_n=1+\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{1\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}$

$$=2\left[1-\frac{1}{2^{n}}\right]=2-\frac{1}{2^{n-1}}\ .$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=2-0=2$.

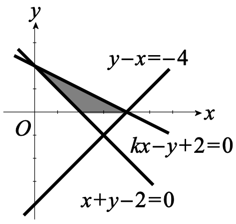
(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+y_n+u_n+v_n\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+2-\frac{1}{2^{n-1}}+0+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{2^{n-1}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)=3\ .$$

故選(3)(4)(5) .

A. 依題意，作圖如下：



因為直線 $kx-y+2=0$ 必過點 $(0,2)$，且直線 $y-x=-4$ 必過可行解區的頂點，

所以 $kx-y+2=0$ 通過 $y-x=-4$ 與 $y=0$ 的交點 $(4,0)$，

因此 $4k-0+2=0\Rightarrow k=-\frac{1}{2}$.

B. 從甲乙外的 5 車中選出 2 輛，再從 4 出車序選 2 排入甲乙，排甲先乙後，

最後排入另 2 輛車．故共有

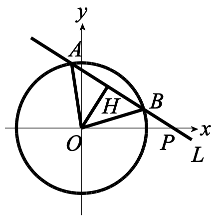
$C^5_2\times\left(C^4_2\times1\right)\times2!=120$

種調度方法．

C. 因為 $\triangle AOB$ 的面積為

$\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\angle AOB=\frac{1}{2}\times\sin\angle AOB$，

所以當 $\angle AOB=90^\circ$ 時，$\triangle AOB$ 的面積有最大值 $\frac{1}{2}$，此時 $\triangle AOB$ 斜邊上的高 $\overline{OH}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，且 $\angle OPH=30^\circ$，故 L 的斜率為 $\tan150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.



一、(1) 因為 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=1$，所以

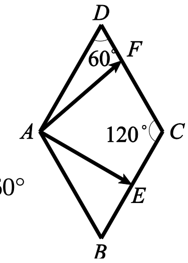
$$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}\right)=1$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DF}=1$$

$$\Rightarrow2\times2\times\cos120^\circ+2\times2x\times\cos0^\circ+1\times2\times\cos0^\circ$$
$$+1\times2x\times\cos120^\circ=1$$

$$\Rightarrow-2+4x+2-x=1\Rightarrow x=\frac{1}{3}\ .$$

(2) $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BE}\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}\right)$



$$=\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CF}$$

$$=1\times2\times\cos0^\circ+1\times\frac{4}{3}\times\cos60^\circ$$

$$=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}\ .$$

二、(1) 經 n 年電力型公車有

$$128+128(1+50\%)+128(1+50\%)^2$$
$$+\cdots+128(1+50\%)^{n-1}$$

$$=\frac{128\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n}\right]}{1-\frac{3}{2}}=256\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n}-1\right]\ .$$

依題意，得

$$256\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n}-1\right]\ge5120\Rightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{n}\ge21,$$

取對數，得 $n(\log3-\log2)\ge\log21$

$$\Rightarrow n\ge\frac{\log3+\log7}{\log3-\log2}\approx\frac{0.4771+0.8451}{0.4771-0.3010}=\frac{1.3222}{0.1761}\approx7.5$$

故 n 的最小值為 8 .

(2) 依題意，得

$$256\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{7}-1\right]+\frac{7\left[2\times400+(7-1)a\right]}{2}\ge10000$$

$$\Rightarrow2\times3^7-256+7\left[400+3a\right]\ge10000$$

$$\Rightarrow21a\ge3082\Rightarrow a\ge146\frac{16}{21}$$

故 a 的最小值為 147 .