106年 指定科目考試模擬試題 數學乙

答案與解析

答案

第壹部分：選擇題

1.	**4**	2.	**3**	3.	**34**	4.	**125**	5.	**24**	6.	**135**	7.	**1234**	8.	**1**	9.	**0**	10.	**2**
11.	**4**	12.	**1**	13.	**0**	14.	**1**	15.	**9**	16.	**1**	17.	**5**	18.	**2**				

第貳部分：非選擇題

1. (1) $a+d=0$，$a^2+bc=2$；(2) -2；(3) $-\frac{9}{2}$。

2. (1) 5；(2) 略；(3) 最大值為 11，此時 $x=1$，$y=5$。

解析

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 答案 **4**

解析 先排學生 4 人，4！種，
再將 3 位老人家排入 3 個空隙其中一個，
且老人家彼此可換，
有 4！×3×3！=432 (種)。
故選 (4)。

2. 答案 **3**

解析 假設 $B(a, \log_2 a)$，$C(a, 0)$
且 $A(1, 0)$，
則△ABC 面積

$=\frac{1}{2}(a-1)\log_2 a=4$

$\Rightarrow (a-1)\log_2 a-8=0$，
考慮函數
$f(x)=(x-1)\log_2 x-8$，
$f(4)=(4-1)\log_2 4-8=-2$，
$f(5)=(5-1)\log_2 5-8>4\log_2 4-8$
$=0$，
由勘根定理知：存在 a 介於 4～5 之間，
使得 $(a-1)\log_2 a-8=0$。
故選 (3)。

二、多選題

3. 答案 **34**

解析 $\overrightarrow{AB}=(2, 1)$，$\overrightarrow{BC}=(1, 2)$，

(1) $D(2, 4)$，$\overrightarrow{DC}=(2, 1)=\overrightarrow{AB}$，
$ABCD$ 為平行四邊形 (不合)。

(2) $D(5, 7)$，$\overrightarrow{CD}=(1, 2)=\overrightarrow{BC}$，
故 B，C，D 共線 (不合)。

(3) $D(0, 3)$，$\overrightarrow{CD}=(-4, -2) // \overrightarrow{AB}$ (為梯形)，
$\overrightarrow{AD}=(-1, 1)$，$\overrightarrow{BD}=(-3, 0)$，
面積=△ABD+△BCD

$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right|+\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}\right|$

$=\frac{3}{2}+3>4$。

(4) $D(3, 6)$，
$\overrightarrow{AD}=(2, 4) // \overrightarrow{BC}=(1, 2)$ (為梯形)，
$\overrightarrow{AD}=(2, 4)$，$\overrightarrow{BD}=(0, 3)$，
面積=△ABD+△BCD

$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right|+\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\right|$

$=3+\frac{3}{2}>4$。

(5) $D(5, 5)$ 經檢查並無平行的一組邊。
故選(3)(4)。

4. 答案 **125**

解析 (1) 實係數三次多項式虛根成對，

可得 $a=1$，$b=-1$，故 $a+b=0$。

(2) $f(-1+i)=0$ 成立。

(3) $y=x$ 與 $y=f(x)$ 交點即解

$f(x)=x \Rightarrow f(x)-x=0$，

仍為三次實係數方程式，必有實根，

表示兩圖形必有交點。

(4) $f(x)=x^2-2017x+106$

$\Rightarrow f(x)-x^2+2017x-106=0$，

仍為三次實係數方程式，必有實根。

(5) 若 $f(0)>0$ 且 $f(1)<0$，由勘根定理知，

在 $(0,1)$ 之間有實根，

若 $f(2017)>0$，

則在 $(1,2017)$ 又產生實根，不合。

故 $f(2017)<0$。

故選(1)(2)(5)。

5. 答案 **24**

解析 (1) $540000\times5\%=27000$。

(2) $1000000\times12\%-37800=82200$。

(3) 若兩個人的需繳稅額一樣，

表示兩人的綜合所得淨額相同。

(4) $1210000\times12\%-37800=107400$

適用級別 2。

(5) 綜合所得總額 2000000 元，

未必採用級別 3 的公式，仍須減除

「扣除額」和「免稅額」，方能確定。

故選(2)(4)。

6. 答案 **135**

解析 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1^n+1^n-1^n)=1+1-1=1$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{1}\right)^n+\left(\frac{1}{1}\right)^n\right]=1+1=2$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]=0+0-0=0$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}\right)^n+\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}\right)^n\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n+2^n\right]$ 發散。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=0+0-0=0$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}\right)^n+\left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}\right)^n\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=0$。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1^n+(-1)^n-1^n\right]=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 發散。

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[0^n+(-1)^n-(-1)^n\right]=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$，

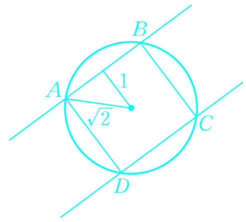
$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{0}{-1}\right)^n+\left(\frac{0}{-1}\right)^n\right]=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$。

故選(1)(3)(5)。

7. 答案 **1234**

解析 $x^2+y^2+2y-1=0$

$\Rightarrow x^2+(y+1)^2=2$，



若形成一個正方形，

則圓心到 L_1 的距離 $=1$，

$\dfrac{|4-d_1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$

$\Rightarrow d=-1$，9。

(1)(2) $d_2=9$，$d_1=-1$。

(3) L_1 和 L_2 的距離即為正方形的邊長 2。

(4) $L_1：3x-4y=-1$

$\Rightarrow x=\dfrac{4y-1}{3}$ 代入圓 C

$\Rightarrow \left(\dfrac{4y-1}{3}\right)^2+y^2+2y-1=0$

$\Rightarrow 25y^2+10y-8=0$，

兩個根 $y_1+y_2=-\dfrac{2}{5}$。

(5) AC 的中點恰為圓心 $(0,-1)$，

故 A，C 兩點的 y 坐標和 $=-2$。

故選(1)(2)(3)(4)。

三、選填題

A. 答案 **1024**

解析 $\hat{p}=\dfrac{0.33+0.39}{2}=0.36$，

誤差 $0.39-0.36=2\sqrt{\dfrac{0.36\times0.64}{n}}$

$\Rightarrow n=1024$。

B. 答案 $\dfrac{10}{19}$

解析 假設有黑球 x 個，則取到黑球、白球的期望

值分別為 $E_{黑}=\dfrac{x}{8+x}$，$E_{白}=\dfrac{5}{8+x}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{8+x}=2\times\dfrac{5}{8+x}\Rightarrow x=10$，

P(一黑一白 | 異色球)

$=\dfrac{5\times10}{3\times5+3\times10+5\times10}=\dfrac{50}{95}=\dfrac{10}{19}$。

C. 答案 $\dfrac{15}{2}$

解析 依題意 $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}+\cdots=\dfrac{\frac{5}{2}r}{1-r^2}$，

所以 $2^{\frac{\frac{5}{2}r}{1-r^2}}=8\Rightarrow \dfrac{\frac{5}{2}r}{1-r^2}=3\Rightarrow 6r^2+5r-6=0$

$\Rightarrow(3r-2)(2r+3)$

$\Rightarrow r=\dfrac{2}{3}$，$-\dfrac{3}{2}$(不合)

$\therefore f(a_1)\cdot f(a_2)\cdot f(a_3)\cdot\cdots\cdot f(a_{10})\cdot\cdots$

$=2^{a_1+a_2+\cdots+a_{10}+\cdots}=2^{\frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{2}{3}}}=2^{\frac{15}{2}}$

$\Rightarrow \log_2\left[f(a_1)\cdot f(a_2)\cdot f(a_3)\cdot\cdots\right]=\dfrac{15}{2}$

第貳部分：非選擇題

1. 答案 **(1) $a+d=0$，$a^2+bc=2$；**

(2) -2；(3) $-\frac{9}{2}$

解析 (1) $A^2=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2+bc=2 \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \\ d^2+bc=2 \end{cases}$

$\because$ b，c 不為 0　$\therefore$ $a+d=0$，$a^2+bc=2$

(2) $\det(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$

$=-(a^2+bc)=-2$。

(3) 由(2)知，A^{-1} 存在

$\because A^2=2I$　$\therefore A^{-1}(A^2)=A^{-1}(2I)$

$\Rightarrow (A^{-1}A)A=2A^{-1} \Rightarrow IA=2A^{-1}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}A=A^{-1}$

$\det(A+A^{-1})$

$=\det(A+\frac{1}{2}A)=\det(\frac{3}{2}A)$

$=(\frac{3}{2})^2\det(A)=\frac{9}{4}\times(-2)=-\frac{9}{2}$。

2. 答案 **(1) 5；(2) 略；**

(3) 最大值為 11，此時 $x=1$，$y=5$

解析 (1) $(x+y-2)(x-y+4)\le 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y-2\ge 0 \\ x-y+4\le 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+y-2\le 0 \\ x-y+4\ge 0 \end{cases}$，

由圖形可知$\triangle ABC$ 的面積為$\frac{1}{2}\times 6\times 3=9$，

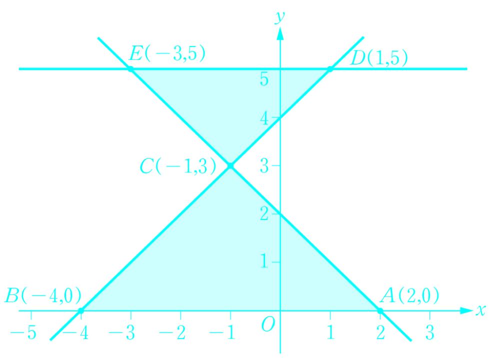
剩餘 $13-9=4$ 為上三角形的面積，

因兩個三角形相似，

故面積比＝邊長的平方比＝高的平方比，

可得上三角形的高為 2，故 $b=3+2=5$。

(2) 可行解區域如圖所示：



(3) 找出可行解區域的頂點，由頂點法可得：

(x,y)	$(2,0)$	$(-4,0)$	$(-1,3)$	$(1,5)$	$(-3,5)$
$P=x+2y$	2	-4	5	11	7
				最大	

目標函數的最大值 11，此時的 $x=1$，$y=5$。