# 第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

## 一、單選題（12 分）

說明：第 1. 題至第 2. 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「解答欄」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 將 $\frac{5}{13}$ 化為小數後，關於小數點後第 2016 位的數字，請選出正確的選項。

(1) 1
(2) 3
(3) 4
(4) 5
(5) 6

答案：(4)

解析：$\frac{5}{13}=0.\overline{384615}$ 是一個循環節為 6 的循環小數
又 $2016=6\times335+6$，
可知小數點後第 2016 位的數字等於小數點後第 6 位的數字 5
故選(4)。

2. 畢業旅行的晚會上總共安排了 6 個不同班級的表演節目和 4 個不同社團的表演節目，若要求每兩個社團表演節目之間至少有一個班級表演節目，關於節目順序表所有不同的排法，請選出正確的選項。

(1) $25\times4!\times6!$
(2) $C_3^5\times4!\times6!$
(3) $C_3^7\times4!\times6!$
(4) $C_6^8\times4!\times6!$
(5) $C_6^{10}\times4!\times6!$

答案：(3)

解析：設□表示班級的表演節目，△表示社團的表演節目，
若要滿足每兩個社團表演節目之間至少有一個班級表演節目
○△○△○△○△○
那表示□必須放置在 5 個○中，且中間 3 個○一定要放□
做法是先在中間 3 個○放置□，再考慮剩下 3 個□在 5 個○的放法，由重複組合的概念知有 $C_3^7$ 種
又 6 個班級表演節目是不同的，且 4 個社團表演是不同的，
因此節目順序表共有 $C_3^7\times4!\times6!$ 種不同的排法
故選(3)。

## 二、多選題（40 分）

說明：第 3. 題至第 7. 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，選出正確選項，畫記在答案卡之「解答欄」。每題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

3. 設 $f(x)=ax^2+bx+c$ 為整係數多項式，且 $f(1)<0$，若方程式 $f(x)=0$ 在區間 $(1,2)$ 中有兩個不同的根。關於下列選項中的敘述，請選出正確的選項。

(1) $a<0$

(2) $4a+2b+c\le -1$

(3) $4a+b>0$

(4) $c$ 的值可能為 $-1$

(5) $a$ 的最大值為 $-5$

答案：(1)(2)(5)

解析：(1) ○：因為方程式 $f(x)=0$ 在區間 $(1,2)$ 中有兩個不同的根，且 $f(1)<0$，可知 $a<0$ 與 $f(2)<0$

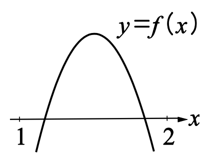
(2) ○：由(1)知 $f(2)=4a+2b+c<0$，又 $a$，$b$，$c$ 皆為整數，可得 $4a+2b+c\le -1$

(3) ╳：頂點的 $x$ 坐標 $-\dfrac{b}{2a}$ 在 1 與 2 之間，即 $1<-\dfrac{b}{2a}<2$，可得 $4a+b<0$

(4) ╳：因為 $f(1)<0$，且 $a$，$b$，$c$ 皆為整數，可得 $f(1)\le -1$

由右略圖知 $f(0)<f(1)\le -1\Rightarrow c<a+b+c\le -1$

所以 $c<-1$




(5) ○：設在區間 $(1,2)$ 中的兩個根為 $r$，$s$，故可設 $f(x)=a(x-r)(x-s)$

因為 $f(1)\le -1$，$f(2)\le -1$，於是 $1\le f(1)f(2)=a^2(r-1)(2-r)(s-1)(2-s)\le \dfrac{a^2}{16}$

$\left(\text{其中因為 } r-1\text{，}2-r \text{ 皆為正數，由算幾不等式得 } \dfrac{(r-1)+(2-r)}{2}\ge\sqrt{(r-1)(2-r)}\right.$

$\left.\Rightarrow (r-1)(2-r)\le\dfrac{1}{4}\text{，同理 } (s-1)(2-s)\le\dfrac{1}{4}\right)$

但 $r\ne s$，上述不等式可改為 $1<\dfrac{a^2}{16}$，則 $a<-4$

又 $a$ 為整數，得 $a\le -5$，故 $a$ 的最大值為 $-5$

故選(1)(2)(5)。

4. 關於下列選項中的敘述，請選出答案為 $C_3^{10}$ 的選項。
⑴設一個三位數的百位數為 $x$，十位數為 $y$，個位數為 $z$，滿足 $x<y<z$ 的三位數個數
⑵由 1 到 12 的正整數中取出不同的三個數，其中任兩個不是連續整數的方法數
⑶ 8 件相同的玩具全部分給甲、乙、丙 3 人的方法數
⑷將 $(1+x)^{10}$ 展開式依 $x$ 降冪排列後第三項的係數
⑸有甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬等 9 個袋子，已知甲袋中裝有 1 個球，乙袋中裝有 2 個球，丙袋中裝有 3 個球，……，壬袋中裝有 9 個球，今取兩球且兩球來自同一袋子的取法

答案：⑵⑸

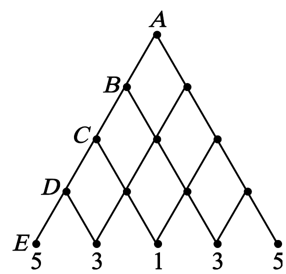
解析：⑴╳：各位數字相異且不考慮排序的三位數有 $C_3^{10}$ 個，其中包含了 $x=0$ 與 $x\neq 0$，又 $x=0$ 的三位數有 $C_2^{9}$ 個，則滿足的三位數有 $C_3^{10}-C_2^{9}$ 個
⑵○：先放置 9 個△，會產生 10 個間隔，
△　△　△　△　△　△　△　△　△
再將 3 個□放置於 10 個間隔中，每個間隔至多放一個□，會有 $C_3^{10}$ 種放法，最後將 1 到 12 由左至右填入，每一種 3 個□的放法對應一組答案，因此答案有 $C_3^{10}$ 種
⑶╳：設甲拿到 $x$ 件，乙拿到 $y$ 件，丙拿到 $z$ 件，可得方程式 $x+y+z=8$，其中 $x$，$y$，$z$ 為非負整數，其解的個數有 $C_2^{10}$ 組
⑷╳：$(1+x)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_k^{10}x^{10-k}$，將其展開式依 $x$ 降冪排列後第三項的係數為 $C_2^{10}$
⑸○：取兩球且兩球來自同一袋子的取法有 $C_2^2+C_2^3+C_2^4+\cdots\cdots+C_2^9=C_3^{10}$(由巴斯卡定理)
故選⑵⑸。

5. 某知名運動品牌想要了解公司在廣告行銷支出與產品銷售收入之間的關聯性，以便提供訊息給相關部門參考，於是以月為單位收集了 20 個月的數據。設所得到的 20 筆數據為 $(x_i\,,y_i)$，$i=1$，2，3，……，20，其中變數 $X$ 表每個月的廣告行銷費用(單位：百萬元)，變數 $Y$ 表示每個月產品的銷售收入金額(單位：千萬元)，已知平均數 $\mu_X=5$，$\mu_Y=4$，$X$ 與 $Y$ 的相關係數為 0.6，$Y$ 對 $X$ 的迴歸直線通過點 $(0\,,0)$。關於下列選項中的敘述，請選出正確的選項。
⑴迴歸直線的斜率是 0.6
⑵ $X$ 的標準差小於 $Y$ 的標準差
⑶ 20 組數據標準化後之數據的迴歸直線斜率是 0.6
⑷若將變數 $Y$ 的單位換成百萬元，則 $X$ 與 $Y$ 的相關係數會改變
⑸若公司決定在下個月編列 510 萬元的廣告行銷費用，利用此 20 組數據的迴歸直線可預測出下個月的產品銷售收入至少有 4100 萬元

答案：⑵⑶

解析：⑴╳：∵迴歸直線通過點$(\mu_X,\mu_Y)=(5\,,4)$ 與點 $(0\,,0)$，則斜率 $m=\dfrac{4-0}{5-0}=0.8$
⑵○：$\because m=r\times\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}\Rightarrow\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}=\dfrac{4}{3}\Rightarrow\sigma_Y=\dfrac{4}{3}\sigma_X>\sigma_X$
⑶○：標準化後數據之迴歸直線斜率為 $r=0.6$
⑷╳：改變單位並不會影響相關係數
⑸╳：設下個月的數據資料為 $(x_{21}\,,y_{21})$，
由題設知 $x_{21}=5.1$，經迴歸直線可預測 $y_{21}=0.8\times5.1=4.08<4.1$，故選⑵⑶。

6. 一彈珠檯的軌道設計如右圖所示，每回只放入一顆彈珠，已知彈珠由 $A$ 點放入後會沿著斜線路徑掉落至 $B$ 層的兩個節點之一，再依斜線路徑進入 $C$ 層，以此類推往下掉落到最底層的五個節點之一，並可獲得對應的分數，若兩兩相鄰的節點間距離皆為 1，且彈珠在每個節點選擇不同斜線路徑往下掉落的機會均等。關於下列選項中的敘述，請選出正確的選項。




(1)此軌道設計的路徑總長為 20

(2)一顆彈珠由 $A$ 層放入後往下掉落到 $E$ 層共有 32 種走法

(3)放入一顆彈珠時，得 1 分的機率最大

(4)放入一顆彈珠時，得分的數學期望值為 3 分

(5)連續放入六顆彈珠時，總得分的數學期望值為 15 分

答案：(1)(5)

解析：(1) ○：路徑總長等於 $2+4+6+8=20$

(2) ╳：共有 $2^4=16$ 種走法

(3) ╳：設隨機變數 $X$ 表示得分

| $X$ | 1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|
| $p_X$ | $\frac{6}{16}$ | $\frac{8}{16}$ | $\frac{2}{16}$ |

得 3 分的機率最大

(4) ╳：$E(X)=1\times\frac{6}{16}+3\times\frac{8}{16}+5\times\frac{2}{16}=2.5$(分)

(5) ○：$E(6X)=6E(X)=15$(分)

故選(1)(5)。

7. 關於議題「3*C* 產品成癮」，翰林完全中學對全校的學生進行了抽樣調查，且依國中部與高中部區分所得結果如下：

| | 國中部 | 高中部 |
|---|---|---|
| 抽樣人數 | $n_1$ | $n_2$ |
| 同意「3*C* 產品成癮」的比例 | $\hat{p}_1$ | $\hat{p}_2$ |
| 95 % 信心水準下的抽樣誤差 | $e_1$ | $e_2$ |

關於下列選項中的敘述，請選出正確的選項。

(1)若 $\hat{p}_1 = \hat{p}_2$，則國中部與高中部同意之比例的 95 % 信賴區間會相同

(2)若在國中部抽查的各項數據不變，則 99.7 % 信心水準下的抽樣誤差會小於 $e_1$

(3)若 $\hat{p}_2$ 不變，且抽樣人數變成 $4n_2$，則 95 % 信心水準下的抽樣誤差為 $\frac{1}{2}e_2$

(4)已知 $\hat{p}_1 < \hat{p}_2$，若不分國中部或高中部，則此次抽樣調查同意「3*C* 產品成癮」的比例 $\hat{p}$ 會滿足 $\hat{p}_1 < \hat{p} < \hat{p}_2$

(5)已知 $e_1 < e_2$，若不分國中部或高中部，則此次抽樣調查在 95 % 信心水準下的抽樣誤差 $e$ 會滿足 $e_1 < e < e_2$

答案：(3)(4)

解析：(1)╳：因為抽樣人數未知，所以無法比較

(2)╳：已知 95 % 信心水準下的抽樣誤差為 $e_1 = 2\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}}$，

而 99.7 % 信心水準下的抽樣誤差為 $e_1' = 3\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}} = \frac{3}{2}e_1$

(3)○：新的抽樣誤差為 $e_2' = 2\sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{4n_2}} = \sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} = \frac{1}{2}e_2$

(4)○：混合後的抽樣比例為 $\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2}$，所以比例 $\hat{p}$ 會滿足 $\hat{p}_1 < \hat{p} < \hat{p}_2$

(5)╳：若 $\hat{p}_1 = \hat{p}_2 = 0.5$，$n_1 = 400$，$n_2 = 225$，則混合後的抽樣比例為

$\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = 0.5$，混合後的抽樣誤差為 $e = 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n_1 + n_2}} = \frac{1}{25} = 0.04$，而

$e_1 = 2\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}} = \frac{1}{20} = 0.05 > e$

故選(3)(4)。

## 三、選填題（24 分）

| |
|---|
| 說明：第 A. 題至第 C. 題為選填題。將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號（8－14）內。每一題完全答對得 8 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。 |

A. 設多項式 $f(x)=2x^5+3x^4+4x^3-5x^2-7x+10$，則 $f(105)$ 除以 209 的餘數為 ⑧ 。

答案：6

解析：令 $x=105$，得 $209=2x-1$

由綜合除法

被除式→ 2＋3＋4－5－7＋10 | $\frac{1}{2}$ ← 除式 $x-\frac{1}{2}$
＋1＋2＋3－1－ 4
商式→ 2＋4＋6－2－8 | ＋ 6 ← 餘式

可得 $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^4+4x^3+6x^2-2x-8)+6$

$=(2x-1)(x^4+2x^3+3x^2-x-4)+6$

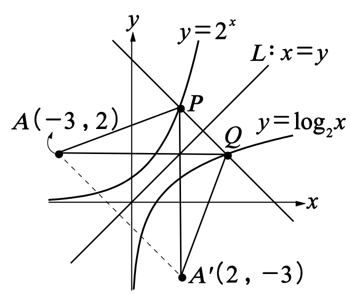
再將 $x$ 以 105 代入，

則 $f(105)=209\times Q(105)+6$，其中 $Q(x)=x^4+2x^3+3x^2-x-4$

可知 $f(105)$ 除以 209 的餘數為 6。

B. 已知坐標平面上有一點 $A(-3,2)$，若一直線 $L$ 垂直於直線 $x=y$，且與 $f(x)=2^x$、$g(x)=\log_2 x$ 兩函數圖形分別交於 $P$、$Q$ 兩點，則 $\overline{AP}+\overline{AQ}$ 之最小值為 ⑨$\sqrt{⑩}$ 。(化為最簡根式)

答案：$5\sqrt{2}$




解析：作 $A(-3,2)$ 關於直線 $L：x=y$ 的對稱點 $A'(2,-3)$

又 $P$，$Q$ 兩點關於直線 $L：x=y$ 對稱，可知 $\overline{AQ}=\overline{A'P}$

則 $\overline{AP}+\overline{AQ}=\overline{AP}+\overline{A'P}\ \geq\ \overline{AA'}=5\sqrt{2}$

等號成立時，$P$ 點為過 $A$，$A'$ 兩點之直線 $L'：x+y=-1$ 與 $f(x)=2^x$ 函數圖形的交點，故 $\overline{AP}+\overline{AQ}$ 之最小值為 $5\sqrt{2}$。

C. 設 $A$，$B$，$C$ 為二階方陣，已知 $AB=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，$AC=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ 且 $3B-2C=\begin{bmatrix}-9 & 1\\ 7 & 8\end{bmatrix}$，則方陣 $A=$ $\begin{bmatrix}⑪ & ⑫\\ ⑬ & ⑭\end{bmatrix}$ 。

答案：$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

解析：$\because A(3B-2C)=3AB-2AC$

$\Rightarrow A\begin{bmatrix}-9 & 1\\ 7 & 8\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}-1 & 4\\ -1 & 1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}4 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-11 & 10\\ -9 & 1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}-11 & 10\\ -9 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-9 & 1\\ 7 & 8\end{bmatrix}^{-1}=\frac{-1}{79}\begin{bmatrix}-11 & 10\\ -9 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & -1\\ -7 & -9\end{bmatrix}=\frac{-1}{79}\begin{bmatrix}-158 & -79\\ -79 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$。

## 第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題計算題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明題號（一、二）與子題號（⑴、⑵），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。<u>務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆</u>。每題配分標於題末。

一、某電視臺推出新型遊戲節目——丟丟樂，由『無敵』與『穩贏』兩隊進行比賽，每隊有兩名參賽者，比賽開始時主持人會給每名參賽者一顆公正的正六面體骰子，其六面分別標上 1，2，3，4，5，6，比賽規則是同隊的兩名參賽者同時投擲手中的骰子，並將向上那一面的點數加總得出點數和，而先擲出點數和為 3 的倍數之隊伍獲勝。已知每人手中的骰子每次投擲皆為獨立，且不互相影響，今『無敵』隊先投擲，『穩贏』隊後投擲，依次輪流，試求：

⑴『無敵』隊獲勝的機率。(8 分)

⑵若比賽獎金有 1 萬元，且依獲勝機率的比例分配，試求『穩贏』隊得獎金的期望值。(4 分)

答案：⑴ $\frac{3}{5}$；⑵ 4000 元

解析：⑴因為 $P$(點數和為 3 的倍數) $=\frac{2+5+4+1}{36}=\frac{1}{3}$

令『無敵』隊為 $A$，『穩贏』隊為 $B$

關於『無敵』隊獲勝的情況為

① $A\to\frac{1}{3}$

② $ABA\to\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}$

③ $ABABA\to\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\frac{1}{3}$

⋮

則『無敵』隊獲勝的機率為 $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\frac{1}{3}+\cdots\cdots=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{3}{5}$。

⑵由⑴可知『穩贏』隊獲勝的機率為 $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

則『穩贏』隊得獎金的期望值為 $10000\times\frac{2}{5}=4000$(元)。

二、翰林電子公司計畫生產『無敵』與『穩贏』兩款手機，已知生產線每次只能生產同款的手機，若生產『無敵』手機，每次只能產出 5 支，需要成本 3000 元，工時 5 小時，每支可得利潤 300 元；若生產『穩贏』手機，每次只能產出 4 支，需要成本 2000 元，工時 8 小時，每支可得利潤 500 元。如果生產部門設定此生產計畫之總生產成本不超過 320000 元，總工時不超過 1000 小時。

⑴若預計生產『無敵』手機 $x$ 次，『穩贏』手機 $y$ 次，除了 $x \ge 0$、$y \ge 0$ 且 $x$、$y$ 為整數這個條件外，請寫下 $x$，$y$ 必須滿足的不等式組。(2 分)

⑵若想在此生產計畫的限制條件下獲得最大利潤，那麼應該各生產多少支手機，又最大利潤是多少？(10 分)

答案：⑴ $\begin{cases} 3x+2y \le 320 \\ 5x+8y \le 1000 \end{cases}$；⑵生產『無敵』手機 200 支，『穩贏』手機 400 支，可得最大利潤 260000 元

解析：⑴設預計生產『無敵』手機 $x$ 次，『穩贏』手機 $y$ 次，

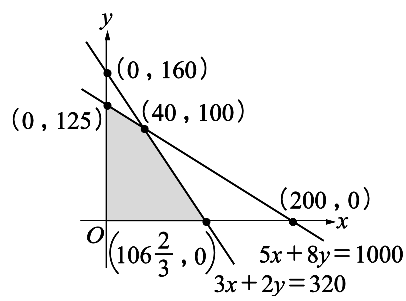
除了 $x \ge 0$、$y \ge 0$ 且 $x$、$y$ 為整數這個條件外，$x$、$y$ 的限制條件如以下聯立不等式：

$$\begin{cases} 3000x+2000y \le 320000 \\ 5x+8y \le 1000 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+2y \le 320 \\ 5x+8y \le 1000 \end{cases}$$。

⑵目標函數為 $f(x , y)=1500x+2000y$，

其可行解區域圖解如右圖陰影部分




此可行解區域的四個端點坐標分別是 $(0 , 0)$、$\left(106\frac{2}{3} , 0\right)$、

$(40 , 100)$、$(0 , 125)$，依端點法可得 $f(0 , 0)=0$，

$f\left(106\frac{2}{3} , 0\right)=160000$，$f(40 , 100)=260000$、$f(0 , 125)=250000$

或依平行線法，因為 $1500x+2000y=0$ 之斜率為 $-\frac{3}{4}$，而可行解區域最靠右上兩邊界的斜率分別是 $-\frac{3}{2}$、$-\frac{5}{8}$，由於 $-\frac{3}{2}<-\frac{3}{4}<-\frac{5}{8}$，

可知目標函數 $f(x , y)=1500x+2000y$ 之最大值為 $f(40 , 100)=260000$，

故公司生產『無敵』手機 40 次，『穩贏』手機 100 次，

即生產『無敵』手機 200 支，『穩贏』手機 400 支，可得最大利潤 260000 元。