龍騰文化指定科目考試模擬試卷

數學乙考科　解答卷

■答案

第壹部分：

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭
4	5	5	1	23	125	2345	13	–	1	–	1	0	2
⑮	⑯	⑰	⑱	⑲	⑳	㉑	㉒						
1	5	9	0	–	3	–	2						

第貳部分：

一.(1)	一.(2)	一.(3)	二.(1)	二.(2)	二.(3)
見解析	$\frac{25}{13}$	$\frac{2}{5}\pi$	$x=15$，$y=20$	1.9 分鐘	$\frac{9}{80}$

■解析

1. 因為 $\log_{\frac{1}{2}} x<\log_{\frac{1}{2}} y<\log_{\frac{1}{2}} 1$，且底數 $\frac{1}{2}<1$，

   所以 $x>y>1$．

   故選(4)．

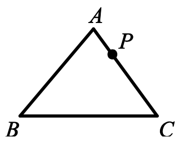
2. 設商式為 $Q(x)$．利用除法原理，得

   $x^{13}+ax+13=(x+1)^2Q(x)+(2x+3)$．

   將 $x=-1$ 代入，得 $-1-a+13=1$，

   解得 $a=11$．故選(5)．

3. 因為 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$，



   所以 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}$

   $\Rightarrow \overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{AP}$，

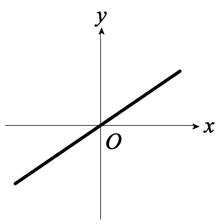
   即 P 點在 $\overline{CA}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{PC}=1:2$．

   故選(5)．

4. 方程式等號兩邊取對數，得

   $\log 3^x=\log 5^y \Rightarrow x\log 3=y\log 5$

   $\Rightarrow y=\frac{\log 3}{\log 5}x \Rightarrow y=(\log_5 3)x$．



   (1) 圖形為一條通過原點，且斜率為 $\log_5 3$ 的直線．

   (2) 因為直線通過原點且斜率為正，所以 P 點不在第二象限上．

   (3) 當 $a=-\log 5$ 時，$b=-\log 3$，此時 $a<b$．

   (4) 當 a 為無理數 $\log_3 5$ 時，b 為有理數 1．

   (5) 當 a 為有理數 1 時，b 為無理數 $\log_5 3$．

   故選(1)．

5. 設 $f(x)=a(x-1)(x-2)$，$g(x)=b(x-2)(x-3)$，其中 $a\neq 0$，$b\neq 0$，則

   $f(x)+g(x)>0 \Rightarrow (x-2)\big(a(x-1)+b(x-3)\big)>0$

   $\Rightarrow (x-2)\big((a+b)x-(a+3b)\big)>0$．

   (1) 因為 $f(x)+g(x)$ 沒有 $(x-1)(x-3)$ 的因式，所以解不會是 $1<x<3$．

   (2) 當 $a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{1}{2}$ 時，不等式為 $(x-2)(2x-3)>0$，解得 $x>2$ 或 $x<\frac{3}{2}$．

   (3) 當 $a=b=\frac{1}{2}$ 時，不等式為 $(x-2)^2>0$，解得 $x\neq 2$．

   (4) 因為 $y=f(x)+g(x)$ 的圖形至少與 x 軸有一交點 $(2,0)$，所以圖形不會全在 x 軸上方，即不等式的解不會是全體實數．

(5) 與(4)同理，不等式的解不會是無解．

故選(2)(3)．

6. (1) 每人抽中紅球的機率都是 $\frac{3}{10}$，

即 $P(A)=P(B)=\frac{3}{10}$ ．

(2) 因為不考慮第二、三、四位的情形，所以 $P(A\cap B)$ 相當於是第一、二位都抽中紅球的機率，即 $P(A\cap B)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$ ．

(3) $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{3}{10}}=\frac{2}{9}$ ．

(4) 因為 $P(A)=P(B)=\frac{3}{10}$ 且 $P(A\cap B)=\frac{1}{15}$，即

$P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$，

所以 A， B 不為獨立事件．

(5) 設隨機變數 X 表最後一位抽球者的獎金，則

X	100000	0
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$

得期望值 $E(X)=100000\times\frac{3}{10}+0\times\frac{7}{10}=30000$ 元．

故選(1)(2)(5)．

7. (1) 因為迴歸直線通過 $(\mu_x,\mu_y)=(65,70)$ 及 $(67,64)$ 兩點，所以斜率為 $\frac{70-64}{65-67}=-3$ ．

利用點斜式，得 $y-64=-3(x-67)$ ．

(2) 因為迴歸直線的斜率為負，所以 $r<0$ ．

(3) 因為斜率為 -3，且 $-1\le r<0$，所以斜率小於 r ．

(4) 因為斜率 $-3=r\times\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$，所以 $\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=\frac{-3}{r}$ ．

又因為 $-1\le r<0$，所以 $\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\ge 3$，即 $\sigma_x<\sigma_y$ ．

(5) 若 $\sigma_y=3\sigma_x$，則 $-3=r\times\frac{3\sigma_x}{\sigma_x}$，即 $r=-1$ ．

得知：為完全負相關，所有點 (x_i,y_i) 皆落在斜率為負的迴歸直線上．

因此，將 $x=66$ 代入迴歸直線，得

$y-64=-3(66-67)\Rightarrow y=67$，

即 $y_3=67$ ．

故選(2)(3)(4)(5)．

8. 取出號碼是偶數的機率為 $\frac{2}{5}$，奇數的機率為 $\frac{3}{5}$ ．

(1) $P_2=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{13}{25}$ ．

(2) 這 n 個號碼的和為偶數的情形，可分兩類：

①前 $(n-1)$ 個號碼的和為偶數且第 n 個號碼為偶數．

②前 $(n-1)$ 個號碼的和為奇數且第 n 個號碼為奇數．

得 $P_n=P_{n-1}\times\frac{2}{5}+(1-P_{n-1})\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}P_{n-1}$ ．

(3) 由(2)，得

$P_n-\frac{1}{2}=\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{5}P_{n-1}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{10}-\frac{1}{5}P_{n-1}=-\frac{1}{5}\left(P_{n-1}-\frac{1}{2}\right)$，

即 $\frac{P_n-\frac{1}{2}}{P_{n-1}-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{5}$ ．因此，$\left\langle P_n-\frac{1}{2}\right\rangle$ 為公比為 $-\frac{1}{5}$ 的等比數列．

(4) 因為 $\left\langle P_n-\frac{1}{2}\right\rangle$ 為首項 $P_1-\frac{1}{2}=\frac{2}{5}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{10}$，公比 $-\frac{1}{5}$ 的等比數列，所以 $P_n-\frac{1}{2}=\left(-\frac{1}{10}\right)\times\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$，

即 $P_n=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{10}\right)\times\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ ．

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$ ．

(5) 將 $P_n=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{10}\right)\times\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ 代入 $\left|P_n-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{10^7}$，

得 $\frac{1}{10}\times\frac{1}{5^{n-1}}<\frac{1}{10^7}$，即 $5^{n-1}>10^6$ ．

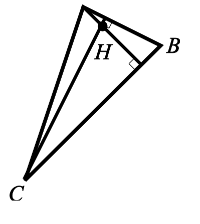
取 log，得 $(n-1)\log 5>6$，

移項得 $n>1+\frac{6}{\log 5}\approx 1+\frac{6}{0.6990}\approx 9.58$，

因此，n 至少為 10 ．

故選(1)(3)．

A. (1) 因為 $\overleftrightarrow{AH}$ 的斜率為



$\frac{-2-(-1)}{3-2}=-1$，且 $\overleftrightarrow{AH}\perp\overleftrightarrow{BC}$，

所以 $\overleftrightarrow{BC}$：$y+3=1\cdot(x-6)$，

即 $y=x-9$ ．

因為 $\overleftrightarrow{BH}$ 的斜率為 $\frac{-2-(-3)}{3-6}=-\frac{1}{3}$，且 $\overleftrightarrow{BH}\perp\overleftrightarrow{AC}$，

所以 $\overleftrightarrow{AC}$： $y+1=3\cdot(x-2)$，即 $y=3x-7$ ．

解 $\begin{cases} y=x-9 \\ y=3x-7 \end{cases}$，得 $x=-1$， $y=-10$，

即 C 的坐標為 $(-1,-10)$ ．

(2) 因為 $\overrightarrow{AB}=(4,-2)$， $\overrightarrow{AC}=(-3,-9)$，所以 $\triangle ABC$ 的面積為 $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -9 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|-42|=21$ ．

B. 依每科人數分成兩類：

(1) 3 人，1 人，1 人的選派法有

$C_3^3C_1^4C_1^5+C_1^3C_3^4C_1^5+C_1^3C_1^4C_3^5$

$=20+60+120=200$（種）．

(2) 2 人，2 人，1 人的選派法有

$C_2^3C_2^4C_1^5+C_2^3C_1^4C_2^5+C_1^3C_2^4C_2^5$

$=90+120+180=390$（種）．

故共有 $200+390=590$ 種．

C. 合併兩條件，得 $A\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$．

因此，

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

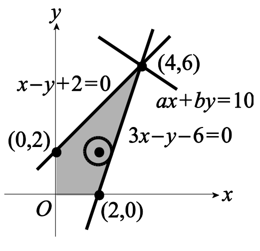
又因為 $A^2=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=-I$，

所以 $A^4=(-I)^2=I$ ．

於是 $A^4\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$，

故數對 $(a,b)=(-3,-2)$ ．

一、(1) 解 $\begin{cases} 3x-y-6=0 \\ x-y+2=0 \end{cases}$，



得 $x=4$， $y=6$ ．

可行解區如右圖的鋪色四邊形區域，

四個頂點坐標分別為

$(0,0)$，$(2,0)$，$(4,6)$，$(0,2)$ ．

(2) 利用頂點法：

(x,y)	$(0,0)$	$(2,0)$	$(4,6)$	$(0,2)$
$ax+by$	0	$2a$	$4a+6b$	$2b$

因為 $a>0$， $b>0$，所以最大值為 $4a+6b$ ．

又因為最大值為 10，所以 $4a+6b=10$，

即 $b=\frac{5-2a}{3}$ ．因此

$$a^2+b^2=a^2+\left(\frac{5-2a}{3}\right)^2=\frac{1}{9}\left(13a^2-20a+25\right)$$

$$=\frac{13}{9}\left(a^2-\frac{20}{13}a\right)+\frac{25}{9}$$

$$=\frac{13}{9}\left(a^2-\frac{20}{13}a+\frac{100}{169}\right)-\frac{100}{117}+\frac{25}{9}$$

$$=\frac{13}{9}\left(a-\frac{10}{13}\right)^2+\frac{25}{13},$$

故當 $a=\frac{10}{13}$ 時， a^2+b^2 有最小值 $\frac{25}{13}$ ．

(3) 由(1)的圖及點到直線的距離公式，得半徑 r 的最大值為 $\frac{|3\times 2-2-6|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{10}}$，

故圓 C 面積的最大值為 $\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2\pi=\frac{2}{5}\pi$ ．

二、(1) 因為超過 6 件的顧客占 55%，所以

$x+30=45$ 且 $25+y+10=55$，

解得 $x=15$， $y=20$ ．

(2) X 的機率分布如下：

X	1	1.5	2	2.5	3
P	$\frac{15}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{10}{100}$

故期望值 $E(X)$

$$=1\times\frac{15}{100}+1.5\times\frac{30}{100}+2\times\frac{25}{100}+2.5\times\frac{20}{100}+3\times\frac{10}{100}$$

$=1.9$（分鐘）．

(3) 令 X_1，X_2 分別表示前面第 1 位與第 2 位的結帳時間，則等候時間不超過 2.5 分鐘的機率為

$P(X_1=1 \text{ 且 } X_2=1)+P(X_1=1.5 \text{ 且 } X_2=1)$

$+P(X_1=1 \text{ 且 } X_2=1.5)$

$=P(X_1=1)\times P(X_2=1)+P(X_1=1.5)\times P(X_2=1)$

$+P(X_1=1)\times P(X_2=1.5)$

$$=\frac{15}{100}\times\frac{15}{100}+\frac{30}{100}\times\frac{15}{100}+\frac{15}{100}\times\frac{30}{100}=\frac{9}{80}.$$