107 學年度指定科目考試模擬試題

數學甲考科

教師用

作答注意事項

考試時間：80 分鐘

題型題數：
- 單選題共 4 題
- 多選題共 3 題
- 選填題共 4 題
- 非選擇題共 2 題

作答方式：
- 選擇題答案請填入後面之答案欄中
- 非選擇題用黑色或藍色筆，在「作答區」上作答

◎註：1. 答錯不倒扣

2. 此份試題本為模擬指定科目考科之測驗形式，
作答方式仍以未來實際之測驗形式為準

南一書局

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 24 分）

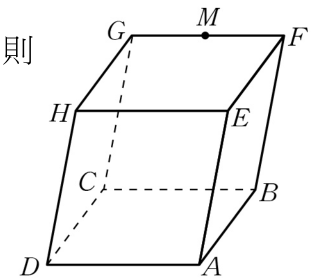
說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請在「選擇（填）題答案區」作答。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

(2) 1. 函數 $f(x)=2x-|x-2|$ 的圖形與 x 軸有幾個交點？

(1) 0 個　(2) 1 個　(3) 2 個　(4) 3 個　(5) 無限多個

1. 題意如同問方程式 $2x-|x-2|=0$ 有幾個相異實根：
(i) $x\geq 2$ 時，$2x-(x-2)=0\Rightarrow x=-2$，不合。
(ii) $x<2$ 時，$2x+(x-2)=0\Rightarrow x=\frac{2}{3}$，有一個解。
選(2)。

(2) 2. 右圖平行六面體 $ABCD-EFGH$ 的體積為 S，且 M 是 $\overline{FG}$ 的中點，則 $|(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AM}|=$



(1) $2S$　(2) S　(3) $\frac{1}{2}S$　(4) $\frac{1}{3}S$　(5) $\frac{1}{6}S$

2. $|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}|=\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{AD}$ 所張成的平行四邊形面積
$=\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AD}$ 所張成的平行四邊形面積
$=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|$，
又 M 與 E 到底面 $ABCD$ 的距離相等
$\Rightarrow\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ 與 $\overrightarrow{AM}$ 所張成的平行六面體體積 $=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 與 $\overrightarrow{AE}$ 所張成的平行六面體體積
$\Rightarrow|(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AM}|=S$，選(2)。

(4) 3. 設二階方陣 $T=\begin{bmatrix}1&-2\\2&1\end{bmatrix}$，若 $A(a,b)$，$B(c,d)$ 是坐標平面上異於原點 $O(0,0)$ 的兩點且 $T^2\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$，則 $\cos(\angle AOB)=$

(1) $\frac{1}{\sqrt{5}}$　(2) $\frac{2}{\sqrt{5}}$　(3) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$　(4) $-\frac{3}{5}$　(5) $-\frac{4}{5}$

3. 設銳角 θ 滿足 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$，則

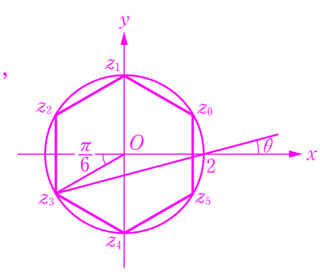
$$T=\sqrt{5}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{-2}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}=\sqrt{5}\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix},$$

T 表示將平面上的點旋轉 θ，再伸縮 $\sqrt{5}$ 倍。
所以 $\cos\angle AOB=\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2(\frac{1}{\sqrt{5}})^2-1=-\frac{3}{5}$，選(4)。

(1) 4. 複數 z 滿足 $z^6=-64$，且 z 的實部與虛部皆小於 0，則下列何者是 $2-z$ 的主輻角？

(1) $\frac{\pi}{12}$　(2) $\frac{\pi}{6}$　(3) $\frac{\pi}{4}$　(4) $\frac{\pi}{3}$　(5) $\frac{2\pi}{3}$

4. $z^6=64(\cos\pi+i\sin\pi)$
$\Rightarrow z_k=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6}\right)\right]$，$k=0$，1，2，3，4，5，
標示在複數平面，如右圖。
實部與虛部皆小於 0 的解是 z_3，$2-z_3$ 的主輻角為右圖中的 θ，
$\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$，選(1)。



二、多選題（占 24 分）

說明：第 5 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請在「選擇（填）題答案區」作答。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

(2)(3)(4) 5. 下列關於兩函數 $f(x)=3\sin x+2\cos x$，$g(x)=3\sin x-2\cos x$ 的敘述，哪些是正確的？

(1) 當 $0\le x\le 2\pi$，方程式 $f(x)=1$ 有 3 個解

(2) 當 $0\le x\le 2\pi$，方程式 $g(x)=x$ 有 2 個解

(3) 當 $0\le x\le 2\pi$，兩函數 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 有 2 個交點

(4) 若 $f(x)$ 在 $x=\alpha$ 處有最大值，則 $g(x)$ 在 $x=-\alpha$ 處有最小值

(5) 若 $f(x)$ 對稱於直線 $x=\beta$，則 $g(x)$ 對稱於直線 $x=\beta+\dfrac{\pi}{2}$

5. 設銳角 θ 滿足 $\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$，$\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，則

$f(x)=\sqrt{13}\,(\sin x\cos\theta+\cos x\sin\theta)=\sqrt{13}\,\sin(x+\theta)$，

$g(x)=\sqrt{13}\,(\sin x\cos\theta-\cos x\sin\theta)=\sqrt{13}\,\sin(x-\theta)$

(1) ×：如右圖 (a)，

當 $0\le x\le 2\pi$，$y=f(x)$ 與 $y=1$ 有 2 個交點。

(2) ○：如右圖 (b)，

當 $0\le x\le 2\pi$，$y=g(x)$ 與 $y=x$ 有 2 個交點

(3) ○：解 $f(x)=g(x)$

$\Rightarrow 3\sin x+2\cos x=3\sin x-2\cos x\Rightarrow\cos x=0$，

當 $0\le x\le 2\pi$，$x=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3\pi}{2}$，有 2 個交點。

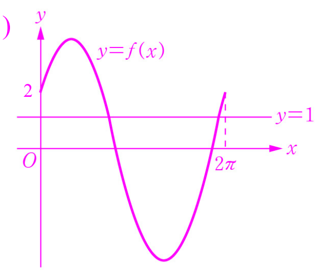


圖 (a)

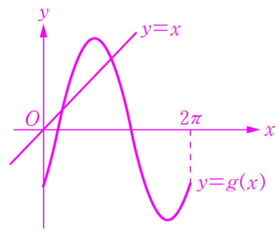


圖 (b)

(4) ○：若 $f(x)$ 在 $x=\alpha$ 處有最大值，則 $\sin(\alpha+\theta)=1$

$\Rightarrow\sin(-\alpha-\theta)=-\sin(\alpha+\theta)=-1\Rightarrow g(x)$ 在 $x=-\alpha$ 處有最小值。

(5) ×：若 $f(x)$ 對稱於直線 $x=\beta$，則 $\sin(\beta+\theta)=\pm1$，

而 $\sin(\beta+\dfrac{\pi}{2}-\theta)\ne\pm1$，故 $g(x)$ 並不對稱於直線 $x=\beta+\dfrac{\pi}{2}$。

選(2)(3)(4)。

(2)(3)(5) 6. 已知實係數三次函數 $f(x)$ 在 $x=-1$ 處有極大值 27，在 $x=2$ 處有極小值且 $\int_{-1}^{2}f'(t)\,dt=-27$，則下列選項哪些正確？

(1) $f'(0)=-6$　(2) $f''(\dfrac{1}{2})=0$　(3) $f(0)=20$

(4) $f(x)=\int_{-1}^{x}6(t+1)(t-2)\,dt$　(5) 設 $\alpha<2$，欲使 $\int_{\alpha}^{4}f(t)\,dt$ 有最大值，則 $\alpha=-\dfrac{5}{2}$

6. $f(x)$ 在 $x=-1$ 處有極大值 $27\Rightarrow f'(-1)=0$ 且 $f(-1)=27$；

$f(x)$ 在 $x=2$ 處有極小值 $\Rightarrow f'(2)=0$，

$\int_{-1}^{2}f'(t)\,dt=-27\Rightarrow f(2)-f(-1)=-27\Rightarrow f(2)=0$。

設 $f'(x)=a(x+1)(x-2)=a(x^2-x-2)\Rightarrow f(x)=a(\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-2x)+c$

由 $f(-1)=27$，$f(2)=0\Rightarrow\dfrac{7}{6}a+c=27$ 且 $-\dfrac{10}{3}a+c=0\Rightarrow a=6$，$c=20$，

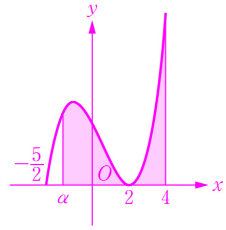
即 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+20$，$f'(x)=6x^2-6x-12$，$f''(x)=12x-6$。

(1) 錯，而(2)(3) 對。

(4) 錯，因為 $\int_{-1}^{x}f'(t)\,dt=f(x)-f(-1)=f(x)-27\ne f(x)$。

(5) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+20=(2x+5)(x-2)^2$，

$\int_{\alpha}^{4}f(t)\,dt$ 表示右圖套色區域面積，當 $\alpha=-\dfrac{5}{2}$時有最大值。



選(2)(3)(5)。

(1)(5) 7. 若數列$\langle a_n \rangle$滿足 $a_1=3$，且對於任意正整數 n 都有 $a_{n+1}a_n=2^{n+1}$，則下列選項哪些正確？

(1) $a_5=12$　(2) $a_{10}=\dfrac{32}{3}$　(3) $a_{101}>6^{20}$　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$　(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_{2n+1}}{5^n}=2$

(已知 $\log 2\approx 0.301$，$\log 3\approx 0.4771$)

7. 觀察 $a_1=3$，$a_2=\dfrac{1}{3}\cdot 2^2$，$a_3=3\cdot 2^1$，$a_4=\dfrac{1}{3}\cdot 2^3$，$a_5=3\cdot 2^2$，

可推得數列$\langle a_n \rangle$滿足 $a_{2k+1}=3\cdot 2^k$，$a_{2k}=\dfrac{1}{3}\cdot 2^{k+1}$。

(1) ○：$a_5=3\cdot 2^2=12$。

(2) ×：$a_{10}=\dfrac{1}{3}\cdot 2^6=\dfrac{64}{3}$。

(3) ×：$a_{101}=3\cdot 2^{50}=3\cdot 32^{10}<36^{10}=6^{20}$。

(4) ×：$\dfrac{a_{2k+1}}{a_{2k}}=\dfrac{3\cdot 2^k}{\frac{1}{3}\cdot 2^{k+1}}=\dfrac{9}{2}$，而$\dfrac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}}=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot 2^{k+2}}{3\cdot 2^k}=\dfrac{4}{9}$，

數列$\left\langle \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right\rangle=\left\langle \dfrac{4}{9},\dfrac{9}{2},\dfrac{4}{9},\dfrac{9}{2},\dfrac{4}{9},\dfrac{9}{2},\cdots \right\rangle$發散。

(5) ○：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_{2n+1}}{5^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3\cdot 2^n}{5^n}=\dfrac{3\cdot\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}=2$。

選(1)(5)。

三、選填題（占 28 分）

說明：1. 第 A 至 D 題，在「選擇 (填) 題答案區」上作答。
　　　2. 每題完全答對給 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 投擲一均勻硬幣 6 次，a 表示正面出現的次數，b 表示反面出現的次數，則 $|a-b|$ 的期望值為 $\dfrac{⑧⑨}{⑩}$。

A. $|a-b|$ 可能為 6，4，2，0：

(i) $|a-b|=6\Rightarrow(a,b)=(6,0)$ 或 $(0,6)$，機率 $p_6=C^6_6\dfrac{1}{2^6}+C^6_0\dfrac{1}{2^6}=\dfrac{2}{64}$。

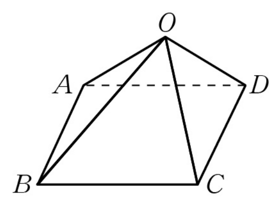
(ii) $|a-b|=4\Rightarrow(a,b)=(5,1)$ 或 $(1,5)$，機率 $p_4=C^6_5\dfrac{1}{2^6}+C^6_1\dfrac{1}{2^6}=\dfrac{12}{64}$。

(iii) $|a-b|=2\Rightarrow(a,b)=(4,2)$ 或 $(2,4)$，機率 $p_2=C^6_4\dfrac{1}{2^6}+C^6_2\dfrac{1}{2^6}=\dfrac{30}{64}$。

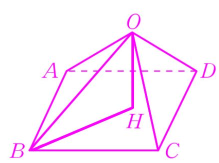
(iv) $|a-b|=0\Rightarrow(a,b)=(3,3)$，機率 $p_0=C^6_3\dfrac{1}{2^6}=\dfrac{20}{64}$。

故 $|a-b|$ 的期望值為 $6\times\dfrac{2}{64}+4\times\dfrac{12}{64}+2\times\dfrac{30}{64}+0\times\dfrac{20}{64}=\dfrac{120}{64}=\dfrac{15}{8}$。

B. 如右圖，$O-ABCD$ 為一金字塔形，已知四個正三角形的邊長為 2，D 到平面 OAB 的距離為 $\dfrac{⑪\sqrt{⑫}}{⑬}$。



B. 如右圖，$\overline{OH}$ 是金字塔的高，



$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{BH}^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$，

設 D 到平面 OAB 的距離為 x，

四面體 $OABD$ 體積是金字塔體積的一半

$\Rightarrow\dfrac{1}{3}\cdot\triangle OAB\cdot x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\cdot 2^2\cdot\sqrt{2}\right)$

$\Rightarrow\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2\cdot x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\cdot 2^2\cdot\sqrt{2}\right)\Rightarrow x=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$。

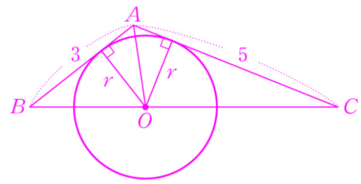
C. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=5$，$\angle A=120°$。圓 O 與 $\overline{AB}$，$\overline{AC}$ 皆相切，且圓 O 的圓心在 $\overline{BC}$ 上，則圓 O 的半徑為 $\underline{\dfrac{⑭⑮\sqrt{⑯}}{⑰⑱}}$。

C. 如右圖，設半徑為 r，

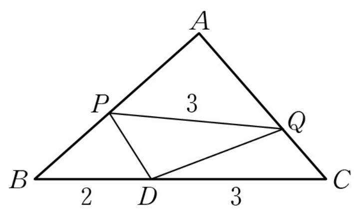
$\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OAC$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot \sin 120°=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot r+\frac{1}{2}\cdot 5\cdot r$

$\Rightarrow r=\frac{15\sqrt{3}}{16}$。



D. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=4$，$\overline{AC}=3$，$\overline{BC}=5$，D 是線段 $\overline{BC}$ 上的點，且 $\overline{BD}=2$，$\overline{CD}=3$。若 P，Q 分別是線段 $\overline{AB}$，$\overline{AC}$ 上的動點，且 $\overline{PQ}=3$，調整 P，Q 位置使 $\triangle BDP$ 與 $\triangle CDQ$ 面積總和最小，此時 $\triangle APQ$ 的面積為 $\underline{\dfrac{⑲}{⑳}}$。



D. 設 $\overline{AP}=x$，$\overline{AQ}=y$，因 $\angle A=90° \Rightarrow x^2+y^2=9$，

$\triangle BDP+\triangle CDQ$

$=\frac{1}{2}\cdot\overline{BP}\cdot\overline{BD}\cdot\sin B+\frac{1}{2}\cdot\overline{CQ}\cdot\overline{CD}\cdot\sin C$

$=\frac{1}{2}\cdot(4-x)\cdot 2\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot(3-y)\cdot 3\cdot\frac{4}{5}=\frac{30-3x-6y}{5}$，

由柯西不等式 $(x^2+y^2)(3^2+6^2)\geq(3x+6y)^2$

$\Rightarrow (3x+6y)^2\leq 9\cdot 45 \Rightarrow -9\sqrt{5}\leq 3x+6y\leq 9\sqrt{5} \Rightarrow \frac{30-9\sqrt{5}}{5}\leq\frac{30-3x-6y}{5}\leq\frac{30+9\sqrt{5}}{5}$，

$3x+6y=9\sqrt{5}$ 時，$\triangle BDP+\triangle CDQ$ 有最小值，

此時 $\frac{x}{3}=\frac{y}{6}\Rightarrow x=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，$y=\frac{6\sqrt{5}}{5}$，

而 $\triangle APQ$ 的面積 $=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{6\sqrt{5}}{5}=\frac{9}{5}$。

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、⋯），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至給零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、坐標空間中有兩點 $A(0,0,0)$，$B(2,2,4)$ 與平面 $E：x+y+z=4$。

(1) 設 A，B 在平面 E 上的投影點分別為 C，D，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ 之值。（6 分）

(2) 若 P 是平面 E 上的點且 $\triangle ABP$ 是正三角形，求 P 之坐標。（6 分）

一. (1) 平面 E 的法向量 $\vec{n}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{AB}=(2,2,4)$，

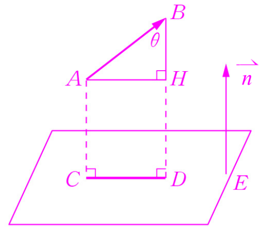
設 θ 是 $\vec{n}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 的夾角，

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=|\vec{n}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta$

$\Rightarrow 8=\sqrt{3}\sqrt{24}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \sin\theta=\dfrac{1}{3}$，

且 $\overline{AH}=\overline{AB}\sin\theta=\sqrt{24}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overline{AB}\cdot\overline{AH}\cdot\sin\theta=\sqrt{24}\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{3}$。



(2) 設 $P(x,y,z)$，

由 $\overline{PA}=\overline{PB} \Rightarrow x^2+y^2+z^2=(x-2)^2+(y-2)^2+(z-4)^2 \Rightarrow x+y+2z=6$ ⋯⋯①

又 P 在平面 E 上 $\Rightarrow x+y+z=4$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯②

由①②，可設 $P(t,2-t,2)$，

由 $\overline{PA}=\overline{AB} \Rightarrow t^2+(2-t)^2+2^2=2^2+2^2+4^2 \Rightarrow t=4$ 或 -2

$\Rightarrow P$ 之坐標為 $(4,-2,2)$ 或 $(-2,4,2)$。

二、坐標平面有圓 $C：x^2+y^2+24x-15y+k=0$，直線 $L：y=x$，拋物線 $\Gamma：y=x^2$。

(1) 若圓 C 與直線 L 恰有一個交點，求 k 之值。（6 分）

(2) 若圓 C 與拋物線 Γ 恰有三個交點，求 k 之值。（6 分）

二. (1) 方程組：$\begin{cases} x^2+y^2+24x-15y+k=0 & \cdots\cdots① \\ y=x & \cdots\cdots② \end{cases}$，恰有一實根，

②代入① $\Rightarrow 2x^2+9x+k=0$，

判別式 $9^2-4\cdot2\cdot k=0 \Rightarrow k=\dfrac{81}{8}$。

(2) 方程組：$\begin{cases} x^2+y^2+24x-15y+k=0 & \cdots\cdots③ \\ y=x^2 & \cdots\cdots④ \end{cases}$，恰有三實根，

④代入③ $\Rightarrow x^4-14x^2+24x+k=0$，

設 $f(x)=x^4-14x^2+24x+k$，$f'(x)=4x^3-28x+24=4(x-1)(x-2)(x+3)$，

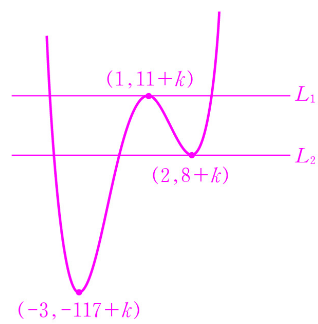
x		-3		1		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-117+k$	↗	$11+k$	↘	$8+k$	↗

作 $y=f(x)$ 的圖形如右：

若 $y=f(x)$ 與 x 軸恰有三個交點，x 軸必是 L_1 或 L_2，

$\Rightarrow 11+k=0$ 或 $8+k=0$

$\Rightarrow k=-11$ 或 $k=-8$。



107年 指定科目考試模擬試題 數學甲

答案與解析

答案

第壹部分：選擇題

1.	**2**	2.	**2**	3.	**4**	4.	**1**	5.	**234**	6.	**235**	7.	**15**	8.	**1**	9.	**5**	10.	**8**
11.	**2**	12.	**6**	13.	**3**	14.	**1**	15.	**5**	16.	**3**	17.	**1**	18.	**6**	19.	**9**	20.	**5**

第貳部分：非選擇題

1. (1) $\frac{8}{3}$；(2) $(4,-2,2)$ 或 $(-2,4,2)$。

2. (1) $\frac{81}{8}$；(2) -11 或 -8。

解析

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 答案 **2**

解析 題意如同問方程式 $2x-|x-2|=0$ 有幾個相異實根：

(i) $x\geq 2$ 時，$2x-(x-2)=0\Rightarrow x=-2$，不合。

(ii) $x<2$ 時，

$2x+(x-2)=0\Rightarrow x=\frac{2}{3}$，有一個解。

選(2)。

2. 答案 **2**

解析 $|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}|$

$=\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{AD}$ 所張成的平行四邊形面積

$=\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AD}$ 所張成的平行四邊形面積

$=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|$，

又 M 與 E 到底面 $ABCD$ 的距離相等

$\Rightarrow\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ 與 $\overrightarrow{AM}$ 所張成的平行六面體體積

$=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 與 $\overrightarrow{AE}$ 所張成的平行六面體體積

$\Rightarrow|(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AM}|=S$，選(2)。

3. 答案 **4**

解析 設銳角 θ 滿足 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$，

則 $T=\sqrt{5}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$

$=\sqrt{5}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，

T 表示將平面上的點旋轉 θ，再伸縮 $\sqrt{5}$ 倍。

所以 $\cos\angle AOB=\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$

$=2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-1=-\frac{3}{5}$，

選(4)。

4. 答案 **1**

解析 $z^6=64(\cos\pi+i\sin\pi)$

$\Rightarrow z_k=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6}\right)+\right.$

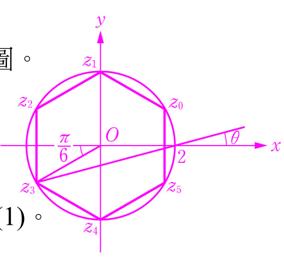
$\left.i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6}\right)\right]$，

$k=0$，1，2，3，4，5，

標示在複數平面，如右圖。

實部與虛部皆小於 0 的解是 z_3，$2-z_3$ 的主輻角為右圖中的 θ，

$\theta={}^1/_2\cdot{}^{\pi}/_6={}^{\pi}/_{12}$，選(1)。



二、多選題

5. 答案 **234**

解析 設銳角 θ 滿足

$\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$，$\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，則

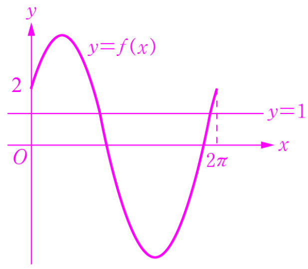
$f(x)=\sqrt{13}\,(\sin x\cos\theta+\cos x\sin\theta)$

$=\sqrt{13}\,\sin(x+\theta)$，

$g(x)=\sqrt{13}\,(\sin x\cos\theta-\cos x\sin\theta)$

$=\sqrt{13}\,\sin(x-\theta)$。

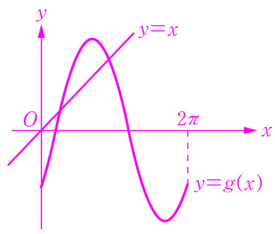
(1) ×：如下圖，



當 $0\leq x\leq 2\pi$，

$y=f(x)$ 與 $y=1$ 有 2 個交點。

(2) ○：如下圖，



當 $0\leq x\leq 2\pi$，

$y=g(x)$ 與 $y=x$ 有 2 個交點

(3) ○：解 $f(x)=g(x)$

$\Rightarrow 3\sin x+2\cos x=3\sin x-2\cos x$

$\Rightarrow \cos x=0$，

當 $0\leq x\leq 2\pi$，

$x=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3\pi}{2}$，有 2 個交點。

(4) ○：若 $f(x)$ 在 $x=\alpha$ 處有最大值，則

$\sin(\alpha+\theta)=1$

$\Rightarrow \sin(-\alpha-\theta)$

$=-\sin(\alpha+\theta)=-1$

$\Rightarrow g(x)$ 在 $x=-\alpha$ 處有最小值。

(5) ×：若 $f(x)$ 對稱於直線 $x=\beta$，則

$\sin(\beta+\theta)=\pm1$，而

$\sin\left(\beta+\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\neq\pm1$，

故 $g(x)$ 並不對稱於直線 $x=\beta+\dfrac{\pi}{2}$。

選(2)(3)(4)。

6. 答案 **235**

解析 $f(x)$ 在 $x=-1$ 處有極大值 27

$\Rightarrow f'(-1)=0$ 且 $f(-1)=27$；

$f(x)$ 在 $x=2$ 處有極小值

$\Rightarrow f'(2)=0$，

$\int_{-1}^{2}f'(t)\,dt=-27$

$\Rightarrow f(2)-f(-1)=-27\Rightarrow f(2)=0$。

設 $f'(x)=a(x+1)(x-2)=a(x^2-x-2)$

$\Rightarrow f(x)=a\left(\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-2x\right)+c$

由 $f(-1)=27$，$f(2)=0$

$\Rightarrow \dfrac{7}{6}a+c=27$ 且 $-\dfrac{10}{3}a+c=0$

$\Rightarrow a=6$，$c=20$，

即 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+20$，

$f'(x)=6x^2-6x-12$，$f''(x)=12x-6$。

(1) 錯，而(2)(3) 對。

(4) 錯，因為 $\int_{-1}^{x}f'(t)\,dt=f(x)-f(-1)$

$=f(x)-27\neq f(x)$。

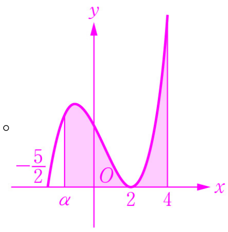
(5) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+20$

$=(2x+5)(x-2)^2$，

$\int_{\alpha}^{4}f(t)\,dt$ 表示

右圖套色區域面積，

當 $\alpha=-\dfrac{5}{2}$ 時有最大值。



選(2)(3)(5)。

7. 答案 **15**

解析 觀察 $a_1=3$，$a_2=\dfrac{1}{3}\cdot2^2$，$a_3=3\cdot2^1$，

$a_4=\dfrac{1}{3}\cdot2^3$，$a_5=3\cdot2^2$，

可推得數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足

$a_{2k+1}=3\cdot2^k$，$a_{2k}=\dfrac{1}{3}\cdot2^{k+1}$。

(1) ○：$a_5=3\cdot2^2=12$。

(2) ×：$a_{10}=\dfrac{1}{3}\cdot2^6=\dfrac{64}{3}$。

(3) ×：$a_{101}=3\cdot2^{50}=3\cdot32^{10}<36^{10}=6^{20}$。

(4) ×：$\dfrac{a_{2k+1}}{a_{2k}}=\dfrac{3\cdot2^k}{\frac{1}{3}\cdot2^{k+1}}=\dfrac{9}{2}$，而

$\dfrac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}}=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot2^{k+2}}{3\cdot2^k}=\dfrac{4}{9}$，

數列 $\left\langle\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\rangle$

$=\left\langle\dfrac{4}{9},\dfrac{9}{2},\dfrac{4}{9},\dfrac{9}{2},\dfrac{4}{9},\dfrac{9}{2},\cdots\right\rangle$

發散。

(5) ○：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{2n+1}}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot2^n}{5^n}=\frac{3\cdot\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}=2$。

選(1)(5)。

三、選填題

A. 答案 $\dfrac{15}{8}$

解析 $|a-b|$ 可能為 6，4，2，0：

(i) $|a-b|=6 \Rightarrow (a,b)=(6,0)$ 或 $(0,6)$，

機率 $p_6=C_6^6\dfrac{1}{2^6}+C_0^6\dfrac{1}{2^6}=\dfrac{2}{64}$。

(ii) $|a-b|=4 \Rightarrow (a,b)=(5,1)$ 或 $(1,5)$，

機率 $p_4=C_5^6\dfrac{1}{2^6}+C_1^6\dfrac{1}{2^6}=\dfrac{12}{64}$。

(iii) $|a-b|=2 \Rightarrow (a,b)=(4,2)$ 或 $(2,4)$，

機率 $p_2=C_4^6\dfrac{1}{2^6}+C_2^6\dfrac{1}{2^6}=\dfrac{30}{64}$。

(iv) $|a-b|=0 \Rightarrow (a,b)=(3,3)$，

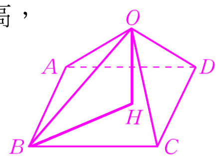
機率 $p_0=C_3^6\dfrac{1}{2^6}=\dfrac{20}{64}$。

故 $|a-b|$ 的期望值為

$6\times\dfrac{2}{64}+4\times\dfrac{12}{64}+2\times\dfrac{30}{64}+0\times\dfrac{20}{64}=\dfrac{120}{64}=\dfrac{15}{8}$。

B. 答案 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

解析 如右圖，$\overline{OH}$ 是金字塔的高，



$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{BH}^2}$

$=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{2}$，

設 D 到平面 OAB 的距離為 x，

四面體 $OABD$ 體積是金字塔體積的一半

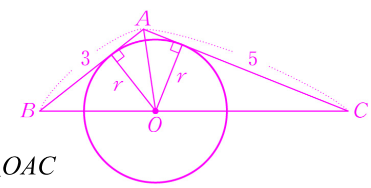
$\Rightarrow \dfrac{1}{3}\cdot\triangle OAB\cdot x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\cdot 2^2\cdot\sqrt{2}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2\cdot x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\cdot 2^2\cdot\sqrt{2}\right)$

$\Rightarrow x=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$。

C. 答案 $\dfrac{15\sqrt{3}}{16}$

解析 如右圖，



設半徑為 r，

$\triangle ABC$

$=\triangle OAB+\triangle OAC$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot\sin 120^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot r+\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot r$

$\Rightarrow r=\dfrac{15\sqrt{3}}{16}$。

D. 答案 $\dfrac{9}{5}$

解析 設 $\overline{AP}=x$，$\overline{AQ}=y$，

因 $\angle A=90^\circ \Rightarrow x^2+y^2=9$，

$\triangle BDP+\triangle CDQ$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{BP}\cdot\overline{BD}\cdot\sin B+$

$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{CQ}\cdot\overline{CD}\cdot\sin C$

$=\dfrac{1}{2}\cdot(4-x)\cdot 2\cdot\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{2}\cdot(3-y)\cdot 3\cdot\dfrac{4}{5}$

$=\dfrac{30-3x-6y}{5}$，

由柯西不等式

$(x^2+y^2)(3^2+6^2)\geq(3x+6y)^2$

$\Rightarrow (3x+6y)^2\leq 9\cdot 45$

$\Rightarrow -9\sqrt{5}\leq 3x+6y\leq 9\sqrt{5}$

$\Rightarrow \dfrac{30-9\sqrt{5}}{5}\leq\dfrac{30-3x-6y}{5}\leq\dfrac{30+9\sqrt{5}}{5}$，

$3x+6y=9\sqrt{5}$ 時，

$\triangle BDP+\triangle CDQ$ 有最小值，

此時 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{6}\Rightarrow x=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$，$y=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$，而

$\triangle APQ$ 的面積

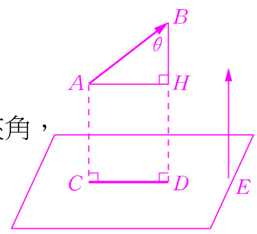
$=\dfrac{1}{2}xy=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\cdot\dfrac{6\sqrt{5}}{5}=\dfrac{9}{5}$。

第貳部分：非選擇題

1. 答案 **(1) $\dfrac{8}{3}$；**

(2) $(4,-2,2)$ 或 $(-2,4,2)$

解析 (1) 平面 E 的法向量



$\overrightarrow{n}=(1,1,1)$，

$\overrightarrow{AB}=(2,2,4)$，

設 θ 是 $\overrightarrow{n}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 的夾角，

$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=|\overrightarrow{n}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta$

$\Rightarrow 8=\sqrt{3}\sqrt{24}\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{1}{3}$，

且 $\overline{AH}=\overline{AB}\sin\theta=\sqrt{24}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overline{AB}\cdot\overline{AH}\cdot\sin\theta$

$=\sqrt{24}\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{3}$。

(2) 設 $P(x,y,z)$，

由 $\overline{PA}=\overline{PB}$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=(x-2)^2+(y-2)^2+(z-4)^2$

$\Rightarrow x+y+2z=6$……………①

又 P 在平面 E 上

$\Rightarrow x+y+z=4$ ……………②

由①②，可設 $P(t,2-t,2)$，

由 $\overline{PA}=\overline{AB}$

$\Rightarrow t^2+(2-t)^2+2^2=2^2+2^2+4^2$

$\Rightarrow t=4$ 或 -2

$\Rightarrow P$ 之坐標為 $(4,-2,2)$ 或 $(-2,4,2)$。

2. 答案 **(1) $\dfrac{81}{8}$；(2) -11 或 -8**

解析 (1) 方程組：

$\begin{cases} x^2+y^2+24x-15y+k=0 \cdots① \\ y=x\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots② \end{cases}$，

恰有一實根，

②代入① $\Rightarrow 2x^2+9x+k=0$，

判別式 $9^2-4\cdot 2\cdot k=0 \Rightarrow k=\dfrac{81}{8}$。

(2) 方程組：

$$\begin{cases} x^2+y^2+24x-15y+k=0 \cdots\cdots ③ \\ y=x^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④ \end{cases},$$

恰有三實根，

④代入③ $\Rightarrow x^4-14x^2+24x+k=0$，

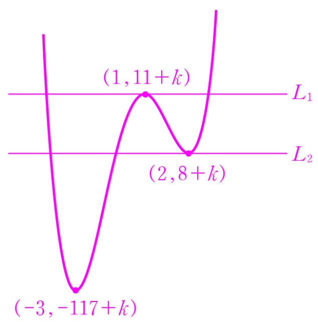
設 $f(x)=x^4-14x^2+24x+k$，

$f'(x)=4x^3-28x+24$

$=4(x-1)(x-2)(x+3)$，

x		-3		1		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-117+k$	↗	$11+k$	↘	$8+k$	↗

作 $y=f(x)$ 的圖形如下：



若 $y=f(x)$ 與 x 軸恰有三個交點，

x 軸必是 L_1 或 L_2，

$\Rightarrow 11+k=0$ 或 $8+k=0$

$\Rightarrow k=-11$ 或 $k=-8$。

筆記欄

筆記欄