指 定 科 目 考 試 模 擬 試 題 題 本

數 學 甲 考 科

教師用

〈測驗範圍〉高中數學 一、二、三年級

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：● 選擇題答案請填入後面之答案欄中。

● 非選擇題用黑色或藍色筆，在「作答區」上作答。

◎註：1. 答錯不倒扣。

2. 此份試題本為模擬指定科目考科之測驗形式，作答方式仍以未來實際之測驗形式為準。

祝考試順利

南一書局

第壹部分：選擇題（佔 74 分）

一、單選題（佔 30 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

(2) 1. 設矩陣 $M=\begin{bmatrix} 3-a & 2 \\ 2 & -1-a \end{bmatrix}$，其中 a 是某固定實數。已知矩陣 M 有反矩陣，則二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 3x+2y=ax \\ 2x-\ y=ay \end{cases}$ 有幾組解？

(1) 無解　(2) 1 組解　(3) 2 組解　(4) 無限多組解　(5) 資料不足，無法判斷

〖解析〗方程組 $\begin{cases} 3x+2y=ax \\ 2x-y=ay \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3-a)x+2y=0 \\ 2x+(-1-a)y=0 \end{cases}$，

矩陣 $M=\begin{bmatrix} 3-a & 2 \\ 2 & -1-a \end{bmatrix}$ 即為上述方程組的係數矩陣，因為矩陣 M 有反矩陣

$\Rightarrow \det(M)\neq 0 \Rightarrow$ 方程組有唯一解 $(0,0)$。

(4) 2. 已知 $\log 2\approx 0.301$，$\log_a 500=0.3$，設 $p=\log_a 5000$，則 p 最接近

(1) 3　(2) 0.99　(3) 0.601　(4) 0.411　(5) 0.222

〖解析〗$\log_a 500=0.3 \Rightarrow \dfrac{\log 500}{\log a}=0.3$⋯⋯⋯①

$p=\log_a 5000 \Rightarrow \dfrac{\log 5000}{\log a}=p$⋯⋯⋯②

②÷①

$\Rightarrow \dfrac{p}{0.3}=\dfrac{\log 5000}{\log 500}=\dfrac{\log 10000-\log 2}{\log 1000-\log 2}=\dfrac{4-0.301}{3-0.301}=\dfrac{3.699}{2.699}$

$\Rightarrow p=0.3\times\dfrac{3.699}{2.699}\approx 0.411$。

(2) 3. 設 $i=\sqrt{-1}$，$|(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)^8-(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)^6|=$

(1) $\sqrt{2}$　(2) $\sqrt{3}$　(3) $\sqrt{6}$　(4) $2\sqrt{2}$　(5) $2\sqrt{3}$

〖解析〗$|(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)^8-(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)^6|$

$=|(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)^6||(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)^2-1|$

$=1\cdot|(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)-1|$

$=|-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i-1|=|-\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i|$

$=\sqrt{(-\dfrac{3}{2})^2+(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{3}$。

(3) 4. $\lim_{x\to 2}\dfrac{|x^2-5x+2|-4}{x-2}$

(1) -1　(2) 0　(3) 1　(4) 2　(5) 極限不存在

〖解析〗將 $x=2$ 代入 x^2-5x+2 得 $2^2-5\cdot 2+2=-4<0$，所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{|x^2-5x+2|-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x^2-5x+2)-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x^2-5x+6)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)(x-3)}{x-2}=\lim_{x\to 2}[-(x-3)]=1。$$

(5) 5. 設 $L_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{m}=\dfrac{z-3}{n}$，$L_2:\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{1}$為空間中兩直線，已知 $L_1\perp L_2$，且兩直線的交點為 (a,b,c)，則

(1) $m-n=2$　(2) $m+n=1$　(3) $a=6$　(4) $a=b+c$　(5) $a+b+c=2$

〖解析〗由 $L_1\perp L_2\Rightarrow(1,m,n)\ (3,-1,1)=0\Rightarrow m-n=3$ ……………①

因 (a,b,c) 是 L_1，L_2的交點，由 $L_2:\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{1}$，令 $a=3t$，$b=-t-1$，$c=t$，

代入 $L_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{m}=\dfrac{z-3}{n}\Rightarrow\dfrac{3t-2}{1}=\dfrac{-t+2}{m}=\dfrac{t-3}{n}$ ………②

由①及比例性質得

② $\Rightarrow\dfrac{3t-2}{1}=\dfrac{-t+2-(t-3)}{m-n}\Rightarrow\dfrac{3t-2}{1}=\dfrac{-2t+5}{3}$，解之得 $t=1$，故 $a=3$，$b=-2$，$c=1$，

又由②，$\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{m}=\dfrac{-2}{n}$，得 $m=1$，$n=-2\Rightarrow m+n=-1$。

二、多選題（佔 16 分）

說明：第 6 題至第 7 題，每題有 4 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4 分；答錯多於 1 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

(2) 6. 空間中三向量$\overrightarrow{u}$、$\overrightarrow{v}$、$\overrightarrow{w}$皆不為零向量。已知$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=3$ 且$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}=-3$，則下列哪些敘述是正確的？

(1) $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$是零向量

(2) $\overrightarrow{u}\perp(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})$

(3) $|\overrightarrow{v}|=|\overrightarrow{w}|$

(4) 可以找到兩個實數 x、y，使得$\overrightarrow{u}=x\overrightarrow{v}+y\overrightarrow{w}$

〖解析〗$\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}=3+(-3)=0\Rightarrow\overrightarrow{u}\perp(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})$，(2)正確。

(1)(3)(4)不一定正確。

例如：

$\overrightarrow{u}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{v}=(2,1,0)$，$\overrightarrow{w}=(0,-3,0)$，則

$\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}=(2,-2,0)\neq(0,0,0)$。

$|\overrightarrow{v}|=\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{w}|=3\Rightarrow|\overrightarrow{v}|\neq|\overrightarrow{w}|$。

$x\overrightarrow{v}+y\overrightarrow{w}=x(2,1,0)+y(0,-3,0)=(2x,x-3y,0)\neq(1,1,1)$。

(2)(3) 7. 設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 是實係數三次多項式，$f'(x)$是 $f(x)$的一階導函數，$f''(x)$是 $f(x)$的二階導函數。已知不等式 $f(x)<0$ 的解集合為 $\{x \mid x<1\}$，且 $f'(x)<0$ 的解集合為 $\{x \mid 2<x<3\}$，則

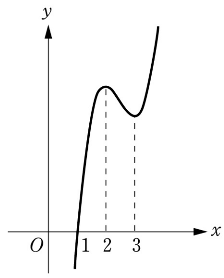
(1) 函數 $y=f(x)$在實數 R 上是遞增函數

(2) $f(x)$在 $x=2$ 處有極大值

(3) $f''(0)<0$

(4) $4a+d>0$

〖解析〗由已知條件，可作 $f(x)$的圖形如右：



$\Rightarrow$ (1) 錯誤，(2) 正確。

(3) 正確：因 $f(x)$在 $x=0$ 凹向下$\Rightarrow f''(0)<0$。

(4) 錯誤：

$f'(x)<0$ 的解集合為$\{x \mid 2<x<3\}$，

則 $f'(x)=3a(x-2)(x-3)=3ax^2-15ax+18a$，且 $a>0$。

積分 $\Rightarrow f(x)=ax^3-\frac{15}{2}ax^2+18ax+d$，

又 $f(1)=0 \Rightarrow a-\frac{15}{2}a+18a+d=0 \Rightarrow d=-\frac{23}{2}a$，

故 $4a+d=4a-\frac{23}{2}a=-\frac{15}{2}a<0$。

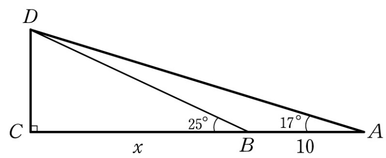
三、選填題（佔 28 分）

說明：1. 第 A 至 D 題，將答案畫記在答案卡上「選擇（填）題答案區」所標示的列號（8 ～17）。
2. 每題完全答對給 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 海岸邊一座燈塔建於垂直海平面的峭壁上，遠方有一艘漁船測得燈塔的仰角為 17°，漁船向著燈塔前進 10 浬，再測得燈塔的仰角為 25°，則此時漁船離海岸邊還有＿⑧⑨＿浬。（四捨五入取到整數位）

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
17°	0.2924	0.9563	0.3057
25°	0.4226	0.9063	0.4663

〖解析〗如右圖，漁船先在 A 處測得燈塔的仰角為 17°，在 B 處再測得燈塔的仰角為 25°，設此時漁船離海岸邊的距離 $\overline{BC}=x$ 浬。



因 $\tan17°=\frac{\overline{CD}}{x+10} \Rightarrow \overline{CD}=(x+10)\tan17°$，

$\tan25°=\frac{\overline{CD}}{x} \Rightarrow \overline{CD}=x\tan25°$，

所以 $(x+10)\tan17°=x\tan25° \Rightarrow x=\frac{10\tan17°}{\tan25°-\tan17°}=\frac{10\cdot0.3057}{0.4663-0.3057}=\frac{3.057}{0.1606}\approx19$。

B. 世界杯足球賽分組預賽，每組有 8 支隊伍，每支隊伍都必須與另外 7 隊比賽一場，勝隊得 3 分，敗隊得 0 分，平手則各得 1 分。有某甲隊與同組中的另外 7 支隊伍實力相當，即甲隊與每一隊比賽，勝、敗、平手的機率都是$\frac{1}{3}$。已知甲隊比完 7 場後的積分是 6 分，請問，甲隊恰勝兩場的機率為 $\dfrac{\text{⑩}}{\text{⑪}}$ 。

〖解析〗7 場後的積分是 6 分的得分組合有

(3,3,0,0,0,0,0)、(3,1,1,1,0,0,0)、(1,1,1,1,1,1,0)三種情形，分別求其機率：

① (3,3,0,0,0,0,0)：機率為$\frac{7!}{5!\,2!}(\frac{1}{3})^5(\frac{1}{3})^2=21\cdot(\frac{1}{3})^7$。（恰勝兩場）

② (3,1,1,1,0,0,0)：機率為$\frac{7!}{1!\,3!\,3!}(\frac{1}{3})^1(\frac{1}{3})^3(\frac{1}{3})^3=140\cdot(\frac{1}{3})^7$。

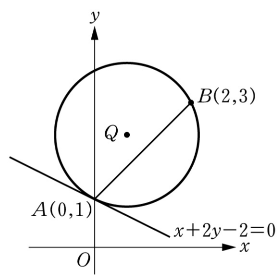
③ (1,1,1,1,1,1,0)：機率為$\frac{7!}{6!\,1!}(\frac{1}{3})^6(\frac{1}{3})^1=7\cdot(\frac{1}{3})^7$。

由貝氏定理，所求機率為$\dfrac{21\cdot(\frac{1}{3})^7}{21\cdot(\frac{1}{3})^7+140\cdot(\frac{1}{3})^7+7\cdot(\frac{1}{3})^7}=\dfrac{21}{21+140+7}=\dfrac{1}{8}$。

C. 圓 C 切直線 $x+2y-2=0$ 於點 (0,1) 且通過點 (2,3)，則圓 C 的圓心坐標為

($\dfrac{\text{⑫}}{\text{⑬}}$, $\dfrac{\text{⑭}}{\text{⑮}}$)。(以最簡分數表示)

〖解析〗設圓 C 的圓心為 $Q(a,b)$，令 $A(0,1)$、$B(2,3)$，



又直線 L：$x+2y-2=0$ 的斜率 $m_L=-\frac{1}{2}$，

因為 $\overline{QA}\perp L\Rightarrow m_{QA}\cdot m_L=-1$

$\Rightarrow\frac{b-1}{a-0}\cdot(-\frac{1}{2})=-1\Rightarrow 2a-b=-1$ ⋯⋯①

因為 $\overline{QA}=\overline{QB}$

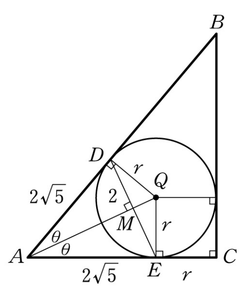
$\Rightarrow\sqrt{(a-0)^2+(b-1)^2}=\sqrt{(a-2)^2+(b-3)^2}$

$\Rightarrow a+b=3$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯②

解①②，得 $a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{7}{3}$。

D. $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\triangle ABC$ 的內切圓分別與 $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 切於點 D、E，且 $\overline{AD}=2\sqrt{5}$ 、$\overline{DE}=4$，則$\triangle ABC$ 的面積為＝ ⑯⑰ 。

〖解析〗設內切圓的圓心為 Q、半徑為 r，作圖如右：



(i) $\overline{AM}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4$

$\Rightarrow\tan\theta=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow r=2\sqrt{5}\tan\theta=2\sqrt{5}\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{5}$

$\Rightarrow\overline{AC}=2\sqrt{5}+\sqrt{5}=3\sqrt{5}$。

(ii) $\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\tan 2\theta=3\sqrt{5}\cdot\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$=3\sqrt{5}\cdot\dfrac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-(\frac{1}{2})^2}=4\sqrt{5}$。

故$\triangle ABC$的面積$=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BC}=\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{5}\cdot4\sqrt{5}=30$。

第貳部分：非選擇題（佔 26 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至給零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、設 L 為函數 $f(x)=x^3-3x^2-x+4$ 的切線，且 L 通過原點。

(1) 求直線 L 的方程式。（7 分）

(2) 求直線 L 與曲線 $y=f(x)$所圍成區域的面積。（7 分）

〖解析〗(1) 設切點為 $(t, t^3-3t^2-t+4) \Rightarrow$ 切線斜率為 $f'(t)=3t^2-6t-1$

$\Rightarrow$ 切線 L：$y-(t^3-3t^2-t+4)=(3t^2-6t-1)(x-t)$，

又 L 通過原點 $(0,0) \Rightarrow 0-(t^3-3t^2-t+4)=(3t^2-6t-1)(0-t)$

$\Rightarrow 2t^3-3t^2-4=0 \Rightarrow (t-2)(2t^2+t+2)=0 \Rightarrow t=2$，

故直線 L 的方程式為 $y-(2^3-3\cdot 2^2-2+4)=(3\cdot 2^2-6\cdot 2-1)(x-2) \Rightarrow x+y=0$。

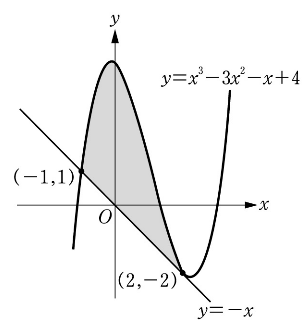
(2) 解方程組 $\begin{cases} y=x^3-3x^2-x+4 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow (x, y)=(2,-2)$或$(-1,1)$，

即切線 L 與三次曲線的另一交點為$(-1,1)$，如右圖：

直線 L 與曲線 $y=f(x)$ 所圍成區域的面積

$=\int_{-1}^{2}〔(x^3-3x^2-x+4)-(-x)〕dx$

$=\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)\,dx=\left(\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right)\Big|_{-1}^{2}=\frac{27}{4}$。



二、已知正四面體 $ABCD$ 的體積為 72，若 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{24}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{24}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{12}\overrightarrow{AD}$，

(1) 設 M 是 $\overline{BC}$ 的中點，N 是直線 AP 與平面 BCD 的交點，證明 M、N、D 三點共線。（6 分）

(2) 求四面體 $PBCD$ 的體積。（6 分）

〖解析〗(1) M 是 $\overline{BC}$ 的中點 $\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$，

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{24}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\frac{1}{12}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{12}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{12}\overrightarrow{AD}$ ………………①

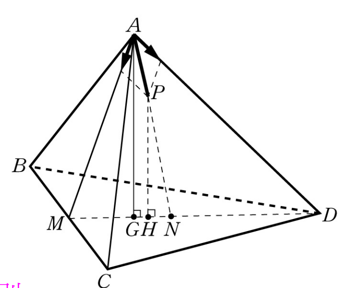
由①，P、A、M、D 四點共平面 $\Rightarrow N$ 是直線 AP 與線段 $\overline{DM}$ 的交點 $\Rightarrow M$、N、D 三點共線。

(2) 設 $\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AP}$，由① $\Rightarrow \overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AP}=k\left(\frac{1}{12}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{12}\overrightarrow{AD}\right)$，

M、N、D 三點共線 $\Rightarrow \frac{1}{12}k+\frac{1}{12}k=1 \Rightarrow k=6$

$\Rightarrow \overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，

所以，N 是 $\overline{DM}$ 的中點且 $\overline{AN}=6\overline{AP}$。



如右圖，$\overline{AG}$、$\overline{PH}$ 分別是四面體 $ABCD$、四面體 $PBCD$ 的高，則

四面體 $PBCD$ 體積：四面體 $ABCD$ 體積 $=\overline{PH}:\overline{AG}=\overline{PN}:\overline{AN}=5:6$

$\Rightarrow$ 四面體 $PBCD$ 的體積 $=$ 四面體 $ABCD$ 的體積 $\times\frac{5}{6}=72\times\frac{5}{6}=60$。